

ОБЩАЯ ФИЗИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

Под редакцией В.М.Белокопытова

*Допущено Научно-методическим Советом
по физике Министерства образования и науки
Российской Федерации в качестве
учебного пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся
по техническим направлениям подготовки
и специальностям*



Москва
Издательский дом МЭИ
2016

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3 я 73
О-28

Авторы:

А.Н. Варава, М.К. Губкин, Д.А. Иванов, И.В. Иванова,
А.В. Кириченко, А.Н. Седов, В.С. Спивак

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук. проф. В.А. Твердислов (МГУ);
доктор физ.-мат. наук. проф. В.И. Лобышев (МГУ);
доктор физ.-мат. наук. проф. Д.Л. Широчин (МГГУ);
канд. техн. наук, доц. С.М. Крейнин (МГГУ)

О-28 **Общая физика [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / А.Н. Варава, М.К. Губкин, Д.А. Иванов и др.; под ред. В.М. Белокопытова. — М.: Издательский дом МЭИ, 2016. — Загл. с тит. экрана.**

ISBN 978-5-383-00999-4

Изложены теоретические материалы по механике, молекулярной физике и термодинамике, электричеству и магнетизму, по оптике и основам квантовой механики. Приведены примеры решения некоторых нестандартных задач, позволяющих глубже понять изучаемый материал.

Настоящее электронное издание подготовлено на основе одноименного печатного издания (2-е изд., стереот.), вышедшего в Издательском доме МЭИ в 2016 году.

Для студентов первого и второго курсов энергетических вузов, а также других учебных заведений.

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3 я 73

ISBN 978-5-383-00999-4

© Авторы, 2010
© АО «Издательский дом МЭИ», 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие содержит 30 глав, в которых излагается теоретический материал по основным разделам курса общей физики, соответствующим действующей программе курса для технических вузов и охватывающим все основные вопросы этой программы.

Основное содержание предлагаемого пособия составляет расширенное изложение лекций по физике, которые в течение 30 лет читались студентам различных факультетов в Московском энергетическом институте на кафедре общей физики и ядерного синтеза. Данный материал входил в ранее изданные Издательством МЭИ комплексы лекций по отдельным разделам дисциплины.

Учебное пособие рассчитано в первую очередь на студентов первого и второго курсов и может быть широко использовано для самостоятельной работы, так как включает в себя не только изложение теоретического материала, но и примеры решения типовых задач. Главное внимание обращается на выяснение физического смысла и содержания основных положений и понятий физики. В отдельные главы выделены примеры решения некоторых нестандартных задач по разделам «Механика», «Молекулярная физика и термодинамика», «Электричество и магнетизм». Данные задачи позволят студентам глубже понять изучаемый материал, развить навыки физического мышления и умения самостоятельно ставить и решать физические задачи.

Учебное пособие может оказаться полезным не только для студентов энергетических вузов, но и других учебных заведений.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность коллегам по кафедре общей физики и ядерного синтеза, в том числе А.В. Славову, В.А. Касьянову, С.Д. Федоровичу и А.Т. Комову за ряд ценных замечаний, высказанных при обсуждении рукописи, а также И.В. Авиловой за большую техническую работу по подготовке книги к изданию.

Предложения и замечания по содержанию книги просим направлять по адресу: 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14, НИУ МЭИ, кафедра общей физики и ядерного синтеза.

Авторы

Раздел I

МЕХАНИКА

Этот раздел физики рассматривает простейшую форму движения материи: перемещение одних тел относительно других и изменение формы тела. Основные законы механики были в значительной степени выяснены Г. Галилеем (1564—1642) и окончательно сформулированы И. Ньютоном (1643—1727). Механика Галилея—Ньютона получила название классической. Ее законы и выводы справедливы при одновременном выполнении двух условий:

1) рассматриваемые тела — макроскопические;

2) $\frac{v}{c} \ll 1$, где v — скорость тела, а $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме (универсальная, т.е. мировая постоянная).

Классическая механика делится на три части: кинематику, динамику и статику.

***Кинематика** изучает движение тел в пространстве и времени без рассмотрения причин, вызывающих это движение.*

***Динамика** изучает движение тел в связи с причинами (силами), которые обуславливают тот или иной характер движения.*

***Статика** изучает равновесие тел и в нашем курсе не рассматривается.*

Глава I

КИНЕМАТИКА

В механике широко используют две модели: материальную точку и материальное тело. ***Материальная точка** — это тело нулевых размеров, т.е. абстрактная физическая модель.* Любое тело можно представить как совокупность материальных точек. Материальное тело может состоять из дискретных точек или быть сплошным.

***Абсолютно твердым телом** называется такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется.*

Важным вопросом в кинематике является задание положения тела в пространстве. Свободное пространство является однородным (в нем нет точек, обладающих особыми свойствами) и изотропным

(в нем нет выделенных направлений). Поэтому в свободном пространстве нельзя определить положение материальной точки или тела.

Телом отсчета называется абсолютно твердое тело, относительно которого можно задать положение произвольного объекта в пространстве.

1.1. Система координат. Система отсчета. Способы задания положения точки в пространстве

Все физические процессы протекают в пространстве и во времени. С телом отсчета связывают *систему координат*, которая позволяет указать «адрес» материальной точки или тела, т.е. задать положение точки или тела в пространстве. **Время** — мера длительности процессов. Для его отсчета требуются часы. *Тело отсчета, система координат и часы образуют систему отсчета*. Мы будем использовать декартову прямоугольную (исключительно правую) систему координат (рис. 1.1). В такой системе координат ось OZ направлена в сторону поступательного движения правого винта, который вращается от оси OX к оси OY по кратчайшему углу. Она не является единственно возможной. В нашем курсе будут использоваться два способа задания положения точки в пространстве: векторный и координатный.

Векторный способ. Положение материальной точки M задается с помощью радиуса-вектора \vec{r} , который проводится из начала координат в точку M (рис. 1.2). Для того, чтобы задать радиус-вектор \vec{r} , необходимо указать:

- 1) начало системы координат — т. O ;

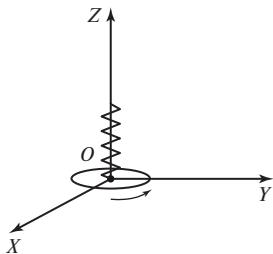


Рис. 1.1

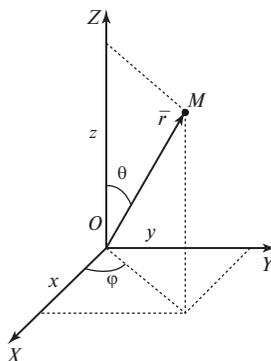


Рис. 1.2

2) модуль $|\vec{r}|$;

3) направление радиуса-вектора в пространстве, определяемое двумя независимыми углами.

Используя векторы единичной длины, сонаправленные с осями координат (орты) \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} представляем \vec{r} следующим образом:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}. \quad (1.1)$$

Для случая, изображенного на рис. 1.2, можно записать:

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z.$$

Координатный способ. Положение материальной точки M задается с помощью координат x, y, z и записывается в виде $M(x, y, z)$.

Замечание. Минимальное число независимых параметров, которое полностью определяет положение физической системы в пространстве, называется **числом ее степеней свободы**. Можно сказать, что материальная точка имеет три степени свободы.

1.2. Понятие траектории. Кинематический закон движения материальной точки. Вектор перемещения. Путь

Линия, которую описывает движущаяся точка в пространстве, называется **траекторией**. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета. Рассмотрим равномерное движение точки по радиусу равномерно вращающегося диска от центра к краю (рис. 1.3). Относительно системы координат (X', Y', Z') , связанной с вращающимся диском, траектория точки будет прямой линией. Относительно системы координат (X, Y, Z) , связанной с Землей, траектория точки будет спиралью Архимеда.

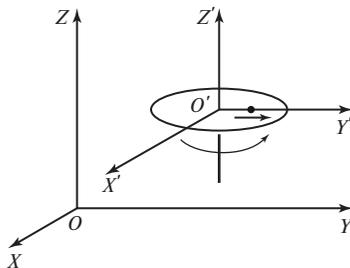


Рис. 1.3

В зависимости от вида траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное* движения. В нашем курсе, как правило, будем рассматривать плоские траектории. Для описания движения материальной точки необходимо задавать **кинематический закон движения** — уравнение или систему уравнений, определяющих положение тела в любой момент времени относительно выбранной системы отсчета. При векторном способе задания положения точки в пространстве кинематический закон ее движения имеет вид: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а при координатном способе он может быть записан в виде:

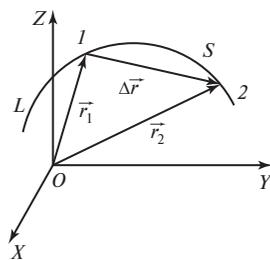


Рис. 1.4

При векторном способе задания положения точки в пространстве кинематический закон ее движения имеет вид: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а при координатном способе он может быть записан в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Если из соотношений (1.2) исключить время t , то получим уравнение, которое будет описывать траекторию материальной точки.

Рассмотрим движение точки по траектории L (рис. 1.4). Пусть в момент времени t точка находилась в положении 1, определяемом радиусом-вектором \vec{r}_1 , а в момент времени $t + \Delta t$ — в положении 2, определяемом радиусом-вектором \vec{r}_2 . Вектор, проведенный из начального положения точки в конечное, называется **вектором перемещения** $\Delta \vec{r}$. Как видно из рис. 1.4, $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, т.е. вектор перемещения равен изменению (или приращению) радиуса-вектора. Расстояние между точками 1 и 2, измеренное вдоль траектории, называется **путем** S .

При стремлении Δt к нулю конечное приращение радиуса-вектора $\Delta \vec{r}$ заменяется на бесконечно малое приращение радиуса-вектора $d\vec{r}$.

Направление вектора $d\vec{r}$ будет совпадать по направлению с единичным вектором $\vec{\tau}$, направленным по касательной к траектории в сторону движения точки.

1.3. Скорость. Нахождение пути. Ускорение

Разобьем траекторию L материальной точки на бесконечно малые участки длиной dL (рис. 1.5). Каждому участку траектории dL будет соответствовать перемещение $d\vec{r}$. Разделим это перемещение на промежуток времени dt , за который материальная точка проходит путь $dS = |d\vec{r}|$. **Мгновенной скоростью** материальной точки называется производная ее радиуса-вектора по времени:

$$\vec{v} = d\vec{r} / dt = \dot{\vec{r}}, \quad (1.3)$$

где точкой сверху обозначена производная по времени.

Так как вектор $d\vec{r}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения точки, то и вектор мгновенной скорости \vec{v} направлен туда же. С учетом выражения (1.1) вектор мгновенной скорости может быть представлен в виде

$$\vec{v} = d\vec{r} / dt = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}.$$

Таким образом, компоненты вектора скорости определяются как соответствующие производные:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (1.4)$$

Тогда модуль скорости может быть найден из выражения:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Равномерным называется движение с постоянной по модулю скоростью, т.е. $|\vec{v}| = \text{const}$.

Определим путь, проходимый телом за время t при движении по произвольной траектории из положения 1 в положение 2 (рис. 1.6).

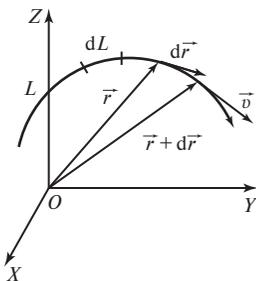


Рис. 1.5

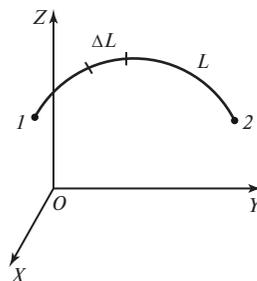


Рис. 1.6

Разобьем траекторию на такие малые участки (в дальнейшем называемые элементарными), чтобы можно было считать скорость на этих участках неизменной. Тогда длина траектории i -го участка (путь) будет выражаться формулой

$$\Delta L_i = v_i \Delta t_i,$$

где v_i — модуль скорости на i -м участке; Δt_i — время его прохождения.

Весь путь можно найти как сумму длин всех элементарных участков. При этом путь будет определен тем точнее, чем меньше рассматриваемые элементарные участки ΔL_i , т.е. чем меньше промежутки времени Δt_i :

$$S = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum \Delta L_i = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum v_i \Delta t_i = \int_0^t |v(t)| dt. \quad (1.5)$$

Важной векторной кинематической величиной является **ускорение** — производная мгновенной скорости по времени, которое характеризует быстроту изменения вектора скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}; \quad \vec{a} \uparrow\uparrow d\vec{v}.$$

В проекциях на оси координат получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

1.4. Кинематический закон движения материальной точки с постоянным ускорением

Если вектор ускорения остается постоянным по модулю и направлению, то такое движение называется **равнопеременным**.

Из определения ускорения следует $d\vec{v} = \vec{a} dt$. После интегрирования этого выражения получим

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t, \quad (1.7)$$

где \vec{v}_0 — начальная скорость в момент времени $t = 0$; \vec{v} — скорость в момент времени t .

Воспользуемся выражением (1.3), которое запишем в виде $d\vec{r} = \vec{v} dt$. После подстановки значения скорости из (1.7) и интегрирования при $\vec{a} = \text{const}$ получаем:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a} t^2 / 2,$$

где \vec{r}_0 — радиус-вектор, определяющий положение тела в момент времени $t = 0$.

Используя (1.2), запишем законы изменения координат тела:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + a_x t^2 / 2; \\ y &= y_0 + v_{0y}t + a_y t^2 / 2; \\ z &= z_0 + v_{0z}t + a_z t^2 / 2. \end{aligned} \right\}$$

1.5. Нормальное и тангенциальное ускорения

В общем случае направление вектора ускорения тела неизвестно. Для его нахождения выберем в каждой точке траектории два единичных вектора — $\vec{\tau}$ и \vec{n} . Вектор $\vec{\tau}$ направим по касательной к траектории в сторону движения точки, а вектор \vec{n} — по нормали в сторону вогнутости траектории (рис. 1.7). В конкретных задачах бывает удобно рассматривать проекции вектора ускорения \vec{a} на выбранные таким образом направления.

Проекция \vec{a} на направление \vec{n} называется **нормальным** (центростремительным) **ускорением**, а на направление $\vec{\tau}$ **тангенциальным** (касательным) **ускорением**

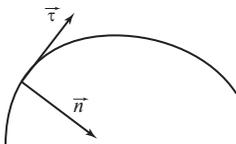


Рис. 1.7

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}, \quad (1.8)$$

где a_τ и a_n — модули тангенциального и нормального ускорений.

Выясним физический смысл этих ускорений. Для этого представим скорость следующим образом: $\vec{v} = v \vec{\tau}$. Определим ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \vec{\tau}) = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} v. \quad (1.9)$$

Из сравнения первых слагаемых в формулах (1.8) и (1.9) видно, что

$$a_{\tau} = dv/dt.$$

Таким образом, тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости. Найдем модуль и физический смысл второго слагаемого выражения (1.9).

Напомним, что *скалярным произведением векторов* \vec{a} и \vec{b} называется скалярная величина c , определяемая как произведение модулей векторов и косинуса угла между векторами: $c = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{a, b})$. Поскольку $(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = 1 = \text{const}$, то $\frac{d(\vec{\tau}, \vec{\tau})}{dt} = 0$. Производную по времени выражения $(\vec{\tau}, \vec{\tau})$ можно найти следующим образом:

$$\frac{d(\vec{\tau}, \vec{\tau})}{dt} = \vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} \vec{\tau} = 2\vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Поэтому $\vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$, а следовательно, $\vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Итак, второе

слагаемое выражения (1.9) — это вектор, перпендикулярный $\vec{\tau}$, а значит, направленный по нормали \vec{n} , т.е. это — вектор нормального ускорения.

Рассмотрим частный случай равномерного движения материальной точки по окружности радиуса R (рис. 1.8, а). Пусть за промежуток времени Δt точка, двигаясь из положения 1 в положение 2, совершила перемещение $\Delta \vec{r}$. Вектор $\vec{\tau}$ за это время изменил направление, повернувшись вместе с точкой на угол $\Delta \alpha$. Изобразим вектор $\Delta \vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$ (рис. 1.8, б). Из подобия равнобедренных треугольников следует

$$|\Delta \vec{\tau}|/\tau = |\Delta \vec{r}|/R,$$

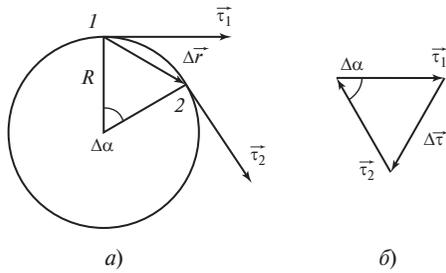


Рис. 1.8

откуда $\Delta \tau = \frac{1}{R} \Delta r$. Устремим промежуток времени Δt к 0. Тогда

$\Delta \tau \rightarrow d\tau$, $\Delta r \rightarrow dr$, а поэтому $d\tau = \frac{1}{R} dr$. Разделив на dt , получим

$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{R} v$. Поэтому модуль второго слагаемого в (1.9)

$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} v \right| = \frac{1}{R} v^2$. Таким образом, получено, что $a_n = v^2/R$.

Если движение по окружности будет неравномерным, то

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (1.10)$$

Для произвольной плоской траектории (рис. 1.9) в каждой ее точке можно провести так называемую соприкасающуюся окружность, которая достаточно хорошо в этом месте траектории совпадает с самой траекторией. Радиус этой окружности назовем **радиусом кривизны траектории** ρ . В этом случае нормальное ускорение

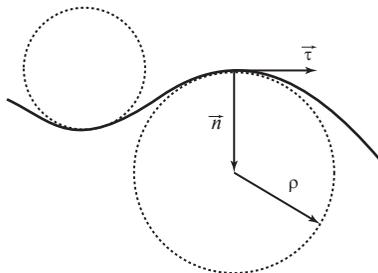


Рис. 1.9

запишется в виде $a_n = v^2/\rho$, а модуль полного ускорения найдется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{(dv/dt)^2 + (v^2/\rho)^2}.$$

Заключение. Все вышеизложенное относится к классическому способу описания движения материальной точки. При неклассическом рассмотрении движения микрочастиц понятия траектории их движения не существует, но можно говорить о вероятности нахождения частицы в той или иной области пространства. Для микрочастицы нельзя одновременно указать точные значения координаты и скорости. В квантовой механике существует *соотношение неопределенностей В. Гейзенберга* $\Delta x \Delta(mv_x) \geq \hbar$, где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с (постоянная М. Планка), которое определяет погрешности одновременного измерения координаты Δx и импульса $\Delta(mv_x)$.

1.6. Вращательное движение абсолютно твердого тела. Кинематические характеристики вращательного движения вокруг неподвижной оси

Все, о чем говорилось до сих пор, относилось к материальной точке. А как описать движение твердого тела? Всякое плоское движение абсолютно твердого тела можно представить как сумму двух движений: поступательного и вращательного.

Поступательным движением абсолютно твердого тела называется такое, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной самой себе. При таком движении траектории всех точек одинаковы, поэтому достаточно наблюдать за движением только одной точки. Обычно в качестве такой точки выбирается так называемый центр масс. О том, как эта точка определяется, расскажем далее.

Вращательным движением абсолютно твердого тела называется такое, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси (рис. 1.10). За бесконечно малый промежуток времени dt все точки тела повернутся на бесконечно малый угол $d\varphi$. Будем считать *угол поворота* векто-

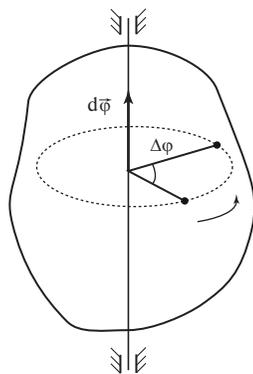


Рис. 1.10

ром, который направлен по оси вращения тела в сторону, определяемую правилом правого винта (правилом буравчика). Согласно этому правилу, если правый винт вращать по направлению вращения твердого тела вокруг оси, совпадающей с осью вращения тела, то направление поступательного движения винта дает направление вектора угла поворота тела $d\vec{\varphi}$.

Векторное произведение двух векторов \vec{a} и \vec{b} , которое обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$, представляет собой вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Он по определению перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} и направлен в ту сторону, куда будет поступательно перемещаться правый винт, если его вращать от вектора \vec{a} (первого сомножителя произведения) к вектору \vec{b} (второму сомножителю произведения) по кратчайшему углу (рис. 1.11). Основные свойства векторного произведения:

1. Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \quad \vec{a} \perp \vec{c}, \quad \vec{b} \perp \vec{c}.$$

2. Векторное произведение не обладает коммутативностью, т.е. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

3. Векторное произведение обладает дистрибутивностью: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{d}$.

4. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Рассмотрим поворот тела на малый угол $d\vec{\varphi}$ за время dt . *Угловой скоростью тела называется производная угла поворота по времени:*

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (1.11)$$

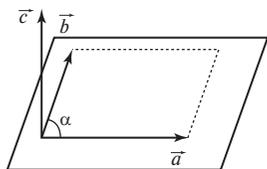


Рис. 1.11

причем направление вектора $\vec{\omega}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$, т.е. также определяется по правилу правого винта. Размерность угловой скорости $[\omega] = \text{рад/с}$. *Вращение называется равномерным, если модуль угловой скорости при вращении тела остается постоянным.* В этом случае $\varphi = \omega t$.

В качестве параметров равномерного вращения используют: **период** (T)— время, за которое тело совершает один оборот; **частоту** (ν) — число оборотов за единицу времени. Между ними существует очевидная связь:

$$\nu = 1/T.$$

При *неравномерном* вращении тела вводится **угловое ускорение** — производная угловой скорости по времени. Это векторная величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt.$$

Сравним угловые скорости $\vec{\omega}_1$ в момент времени t и $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + d\vec{\omega}$ в момент времени $t + dt$. Из рис. 1.12 видно, что векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ сонаправлены при ускоренном (рис. 1.12, а) и противоположны при замедленном вращении тела (рис. 1.12, б). Таким образом, направление вектора $\vec{\varepsilon}$ определяется направлением вектора приращения угловой скорости $d\vec{\omega}$.

Если модуль углового ускорения сохраняет постоянное значение, то **вращение называется равнопеременным**. В этом случае кинематический закон вращения запишем в виде

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t;$$

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \vec{\varepsilon} t^2/2,$$

где $\vec{\omega}_0$ и $\vec{\varphi}_0$ — начальные угловая скорость и угол поворота.

Если твердое тело вращается относительно оси, то каждая точка тела имеет определенную линейную скорость \vec{v} . Найдем связь между скоростями \vec{v} и $\vec{\omega}$. Пусть твердое тело повернулось на угол

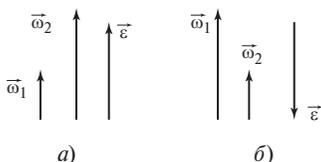


Рис. 1.12

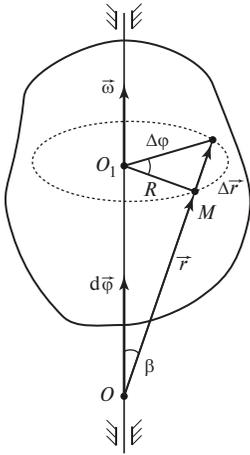


Рис. 1.13

$d\vec{\varphi}$ (рис. 1.13). Тогда произвольная точка тела M совершила перемещение $d\vec{r}$. Напомним, что вектор $d\vec{r}$ направлен по касательной к траектории точки M и при малом $d\vec{\varphi}$ направление $\Delta\vec{r}$ стремится к направлению $d\vec{r}$.

Выберем на оси вращения произвольную точку O , называемую *полюсом*, и поместим в нее начало координат. Положение точки M задается радиусом-вектором \vec{r} , который в общем случае составляет с осью вращения угол β . Отметим, что

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}. \quad (1.12)$$

Действительно, векторы $d\vec{r}$, $d\vec{\varphi}$ и \vec{r} подчиняются правилу правого винта. Найдем модуль векторного произведения:

$$dr = R d\varphi = r \sin \beta d\varphi,$$

где R — радиус окружности, по которой движется точка M .

Если продифференцировать по времени обе части равенства (1.12), то с учетом (1.3) и (1.11) можно получить

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.13)$$

Заметим, что выбор полюса O может быть произвольным (положение точки O никак не влияет на вывод формулы). Если в качестве полюса выбрать точку O_1 , то из (1.13) следует, что

$$v = \omega R.$$

Последнее равенство связывает модули угловой и линейной скоростей точки твердого тела с радиусом окружности, по которой движется рассматриваемая точка.

Найдем ускорение точки M , для чего продифференцируем выражение (1.13) по времени:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (1.14)$$

Первое слагаемое в (1.14) — это вектор, направленный по касательной к траектории точки M , т.е. тангенциальное ускорение:

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (1.15)$$

его модуль $a_\tau = \varepsilon r \sin \beta = \varepsilon R$.

Второе слагаемое в (1.14) — это вектор, направленный к центру окружности, по которой движется точка M , т.е. нормальное ускорение:

$$\vec{a}_n = a_n \vec{n} = \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (1.16)$$

его модуль $a_n = \omega v \sin \frac{\pi}{2} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$.

1.7. Преобразования скорости и ускорения при переходе к другой системе отсчета

Поставим перед собой следующую задачу. Имеются две произвольные системы отсчета (X, Y, Z) и (X', Y', Z') , движущиеся одна относительно другой. Известны скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} некоторой точки M в системе отсчета (X, Y, Z) . Каковы будут соответствующие значения скорости \vec{v}' и ускорения \vec{a}' этой точки в системе (X', Y', Z') ?

Напомним, что в рамках классической механики длины пространственных и временных отрезков считаются абсолютными. Это означает, что длина отрезка, измеренная в некоторой пространственной системе координат, и временной интервал между двумя событиями, измеренный по часам этой системы отсчета, одинаковы в разных системах отсчета, т.е. не зависят от движения. *Свойство физических величин сохранять свои значения неизменными в разных системах отсчета называется инвариантностью, а сами такие величины — инвариантами.*

Пусть положение точки M в системе (X, Y, Z) задается радиусом-вектором \vec{r} , а в системе (X', Y', Z') радиусом-вектором \vec{r}' (рис. 1.14). Будем считать систему (X, Y, Z) неподвижной (абсолютной), а систему (X', Y', Z') — движущейся относительно нее (относи-

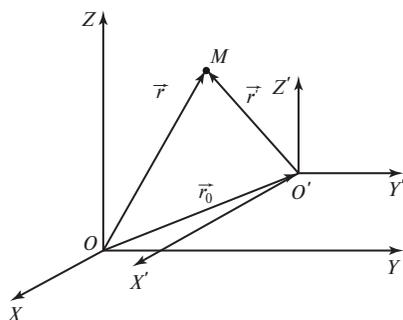


Рис. 1.14

тельной). Если положение движущейся системы относительно неподвижной задается радиусом-вектором \vec{r}_0 , то

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

Таким образом, преобразования координат и времени при переходе из одной системы отсчета в другую в классической механике описываются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x'; \\ y &= y_0 + y'; \\ z &= z_0 + z'; \\ t &= t'. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Данная система уравнений носит название **преобразований Галилея**.

Если перемещение точки M за время dt происходит в неподвижной системе, то оно складывается из перемещения относительно движущейся системы $d\vec{r}'$ и перемещения самой движущейся системы $d\vec{r}_0$:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'.$$

Разделив последнее выражение на dt , получим формулу преобразования скорости

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'. \quad (1.18)$$

Данное выражение называется *классическим законом сложения скоростей*. Если соотношение (1.18) снова разделить на dt , то найдем формулу преобразования ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' . \quad (1.19)$$

Из (1.19) видно, что из условия $\vec{a}_0 = 0$ следует, что $\vec{a} = \vec{a}'$. Таким образом, при движении двух систем отсчета без ускорения одной относительно другой ускорения точки M в таких системах будут одинаковыми.

Глава 2

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика рассматривает два типа задач. Первый тип — определение действующих на материальную точку сил, исходя из закона движения материальной точки. В технике такие задачи решаются, когда необходимо найти внутренние усилия в различного рода деталях машин, если известны законы движения этих деталей. Второй тип задач динамики — определение кинематического закона движения тела, исходя из действующих на тело сил. При этом необходимо знать так называемые начальные условия. Примером такого типа задач является нахождение траектории (дальности полета, высоты подъема, времени полета и т.п.) движения тела, брошенного под углом к горизонту. При этом известно, что на тело действует сила тяжести, а также заданы начальная скорость тела и угол бросания.

В нашем курсе встречаются задачи как первого, так и второго типа. В этой главе наряду с понятиями, которые использовались ранее, будут использоваться новые.

2.1. Основные понятия динамики. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея

При изучении кинематики, когда речь шла лишь об описании движений и не затрагивался вопрос о причинах, вызывающих эти движения, никакой принципиальной разницы между различными системами отсчета не было. Совершенно иначе обстоит дело в динамике — при изучении законов движения. Обнаруживаются существенное различие между разными системами отсчета и преимущества одного типа систем отсчета по сравнению с другими.

Законы механики в разных системах отсчета имеют различный вид, поэтому возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики были бы возможно более простыми. Какова причина появления ускорения материальной точки относительно произвольной системы отсчета? Опыт показывает, что этой причиной могут быть как действия других тел на данную точку, так и свойства самой системы отсчета. Можно предположить, что существует такая система отсчета, в которой ускорение тела целиком

обусловлено только его взаимодействием с другими телами. Свободная материальная точка, не подверженная действию других тел, движется относительно такой системы отсчета без ускорения, т.е. равномерно и прямолинейно (или покоится). Утверждение, что такие системы отсчета существуют, составляет содержание первого закона динамики — закона инерции.

***Первый закон Ньютона:** существуют такие системы отсчета, называемые **инерциальными**, в которых материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния.*

Данный закон не очевиден. Со времен Аристотеля (384—322 гг. до н.э.) до Галилея считалось, что для поддержания неизменной скорости тела необходимо воздействие других тел на него. Существование инерциальных систем отсчета подтверждается опытом. Астрономические наблюдения показали инерциальность гелиоцентрической системы отсчета, связанной с центром Солнца. Любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, также является инерциальной. Действительно, если в инерциальной системе отсчета ускорение тела равно нулю, то оно равно нулю и в любой из таких систем (1.19). *Системы отсчета, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем, называют **неинерциальными**.*

Для инерциальных систем отсчета справедлив ***принцип относительности Галилея***, согласно которому *все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны одна другой*. Это означает, что никакими механическими опытами, проводимыми в данных системах, нельзя установить, покоится эта система отсчета или движется. Основные законы механики, которыми определяются изменения характера движения тел, во всех инерциальных системах отсчета одни и те же.

Изучая на опыте различные движения, можно обнаружить, что в инерциальных системах отсчета любое ускорение тела вызывается действием на него каких-либо других тел. *Мера механического взаимодействия тел называется **силой***. Сила — векторная физическая величина, характеризующаяся модулем, направлением и точкой приложения к телу. Действие силы на тело выражается в сообщении телу ускорения и (или) деформации тела.

2.2. Второй и третий законы Ньютона

Опыт показывает, что любое тело «оказывает сопротивление» попыткам изменить его скорость — как по модулю, так и по направлению. *Свойство материальных тел сохранять свою скорость неиз-*

менной при отсутствии действующих на тело сил и постепенно изменять скорость, когда на тело начинают действовать силы, называется **инертностью**. Мера инертности тела называется **массой тела**. Тело с большей массой более инертно, и наоборот. При действии одинаковых сил на два различных тела отношение масс тел обратно отношению модулей ускорений, сообщаемых телам равными силами:

$$m_1/m_2 = a_2/a_1. \quad (2.1)$$

Таким образом, сравнение масс двух тел, на которые действует одна и та же сила, сводится к сравнению ускорений этих тел. Взяв некоторое тело за эталон массы, можно сравнить массу любого тела с этим эталоном. В рамках классической механики масса обладает двумя важнейшими свойствами:

- 1) масса — величина аддитивная, т.е. масса тела равна сумме масс его частей;
- 2) масса — величина постоянная, не изменяющаяся при движении тела.

Второй закон Ньютона утверждает, что в инерциальных системах отсчета ускорение тела прямо пропорционально силе, действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \vec{F}/m.$$

Если рассматриваемое тело взаимодействует с несколькими телами, то суммарный результат действия отдельных тел можно представить как действие на данное тело векторной суммы сил:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{m}, \quad (2.2)$$

где \vec{F}_i — сила взаимодействия i -го тела с данным.

Единицей силы в СИ является ньютон (Н). 1 ньютон — это такая сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2 .

Опыт показывает, что взаимодействие тел в природе осуществляется парным образом, т.е. если тело I сообщает ускорение телу II , то и тело II сообщает ускорение телу I (рис. 2.1). Общее свойство всех

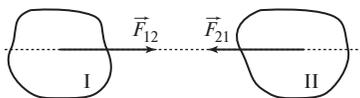


Рис. 2.1

сил взаимодействия постулируется **третьим законом Ньютона**: силы, с которыми две материальные точки действуют одна на другую в инерциальной системе отсчета, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки, т.е.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (2.3)$$

Эти силы приложены к разным телам и являются силами одной природы.

2.3. Силы

Современный взгляд на природу возникновения сил устанавливает **три типа взаимодействий**: 1) гравитационное; 2) электрослабое (электромагнитное и слабое); 3) сильное (или ядерное). Эти взаимодействия будут изучаться в соответствующих разделах курса.

Взаимодействие тел может происходить при «контактном» действии (силы трения, сила упругости, сила натяжения нити, реакция опоры, вес и т.д.) и при действии на расстоянии, посредством поля (сила тяжести, сила Кулона, сила Лоренца и т.д.).

Однако такое разделение сил имеет условный характер: и при непосредственном контакте силы взаимодействия обусловлены наличием тех или иных полей, создаваемых атомами или молекулами тел. Под **полем** мы будем понимать объективную реальность, посредством которой осуществляются взаимодействия.

Понятие поля, так же как понятия силы и массы, относится к числу «первоначальных» понятий в физике. Поэтому дать логически четкие определения этим понятиям, т.е. выразить их через более «первичные», нельзя. Можно описать некоторые свойства поля.

Поле — форма существования материи, которая в отличие от вещества не локализована в пространстве. Можно говорить о массе единицы объема поля, об энергии некоторого объема поля. Строгой границы между полем и веществом провести нельзя, так как при определенных условиях они могут взаимно превращаться, т.е. вещество переходит в поле и наоборот. Поле распространяется в пространстве с определенной скоростью (не более $c = 3 \cdot 10^8$ м/с), поэтому не может быть мгновенных взаимодействий.

Рассмотрим некоторые виды сил, которые встретятся нам при изучении задач механики.

1. **Гравитационное взаимодействие** — универсальное взаимодействие между любыми видами материи. Если две материальные точки движутся со скоростями $v \ll c$, то справедлив **закон всемир-**

ного тяготения Ньютона, согласно которому эти точки притягиваются одна к другой с силой, вычисляемой по формуле

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.4)$$

где r — расстояние между точками. Коэффициент пропорциональности G называется *гравитационной постоянной*, и был впервые экспериментально определен английским ученым Г. Кавендишем в 1798 г. По современным данным $G = 6,67259(85) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$. Фигурирующие в этом законе массы называют *гравитационными* в отличие от *инертной* массы, входящей во второй закон Ньютона. Из опыта, однако, установлено, что гравитационная и инертная массы любого тела пропорциональны одна другой. Поэтому можно считать их равными (т.е. выбрать один и тот же эталон для измерения обеих масс) и говорить просто о массе, которая выступает как мера инертности тела или как мера гравитационного воздействия.

Теория тяготения Ньютона явилась большим достижением своего времени. На основании этой теории можно описать движение естественных и искусственных тел в Солнечной системе, провести гравиметрическую разведку полезных ископаемых и т.д. Блестящим подтверждением теории Ньютона явилось открытие планеты Нептун английским астрономом Дж. Адамсом в 1846 г. по расчетам возмущений орбиты Урана, которые выполнил французский математик У. Леверье. Однако в некоторых случаях тяготение не может быть описано законом Ньютона. Так, эта теория неприменима для расчета траектории светового луча в гравитационном поле. Обобщение теории тяготения на основе специальной теории относительности было сделано А. Эйнштейном в 1916 г. и получило название общей теории относительности, которая подтвердилась в ряде экспериментов.

При рассмотрении движения тела массой m в поле тяготения Земли, если высота тела над поверхностью планеты меняется незначительно по сравнению с радиусом Земли, выражение силы тяготения (2.4) удобно заменить выражением *однородной силы тяжести*

$$\vec{F} = m \vec{g},$$

где \vec{g} — ускорение свободного падения тела в поле тяжести.

2. **Вес тела** \vec{P} — сила, с которой тело действует на опору (или подвес), неподвижную относительно данного тела.

3. **Внешнее трение**, которое обычно называют просто трением в отличие от внутреннего трения, о котором будет сказано в разд. II, — механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания

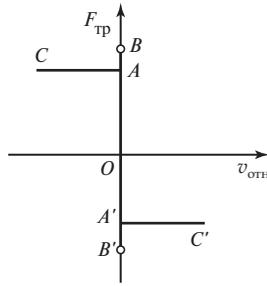


Рис. 2.2

двух прижатых одно к другому тел при их относительном перемещении или попытке к перемещению. В первом случае говорят о наличии *силы трения скольжения*, во втором — о наличии *силы трения покоя*.

Направление силы трения противоположно относительному перемещению трущихся поверхностей или возможному перемещению. По наличию прослойки между телами различают сухое и жидкое трение. При наличии трения скольжения происходит электризация тел, выделение теплоты и разрушение трущихся частиц. Зависимость силы сухого трения от относительной скорости трущихся поверхностей приведена на рис. 2.2. Участки графика OAB и $OA'B'$ соответствуют силе трения покоя, а AC и $A'C'$ — силе трения скольжения. Участки графика AB и $A'B'$ соответствуют явлению застоя.

Возникновение силы трения объясняется, во-первых, изменением поверхностного слоя (разрушением), а во-вторых, преодолением молекулярных связей. В дальнейшем будем рассматривать силу трения скольжения, действующую на тело, движущееся по шероховатой поверхности. Ее модуль определяется выражением

$$F_{\text{тр.ск}} = \mu N, \quad (2.5)$$

где N — модуль силы нормальной реакции, приложенной к телу со стороны опоры; μ — коэффициент трения.

Модуль силы трения покоя не превышает модуля силы трения скольжения и определяется внешней силой.

4. **Упругость** — свойство тел изменять свою форму и размеры под действием нагрузок и самопроизвольно восстанавливать исходную конфигурацию при снятии внешних воздействий. Упругость тел обусловлена электрическими силами взаимодействия атомов и молекул, из которых они построены. Упругие деформации (возникающие,

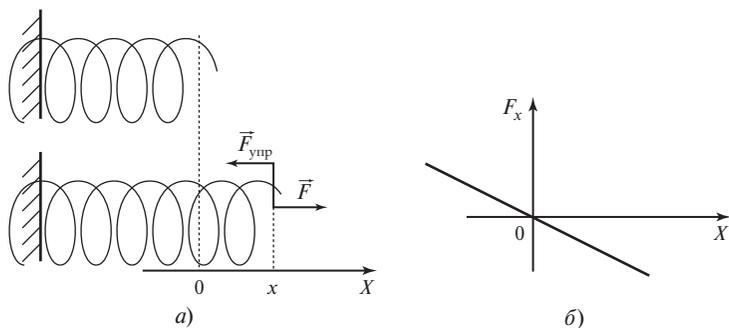


Рис. 2.3

например, при растяжении или сжатии пружин) подчиняются **закону Гука**, который гласит, что

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k \vec{r}, \quad (2.6)$$

где \vec{r} — радиус-вектор, характеризующий смещение частицы из положения равновесия; k — *коэффициент жесткости*, численно равный модулю силы, вызывающей единичное удлинение.

Знак «-» в законе Гука показывает, что упругая сила и перемещение пружины (ее деформация) имеют противоположные направления. На рис. 2.3 *а, б* показаны направление силы упругости при одномерном растяжении пружины и зависимость проекции силы упругости на направление деформации пружины от деформации.

2.4. Импульс материальной точки и системы материальных точек. Закон сохранения импульса

Рассмотрим выражение второго закона Ньютона (2.2) для материальной точки, на которую действуют несколько сил. Если учесть

определение ускорения, то из формулы $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ можно полу-

чить, что

$$d(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i dt. \quad (2.7)$$

Данное соотношение представляет собой иную форму записи второго закона Ньютона. В правой его части находится произведение суммы всех сил, действующих на материальную точку, на временной интервал их действия. Эта величина носит название **импульса сил**.

В левой части (2.7) стоит изменение *векторной физической величины, равной произведению массы тела на его скорость*. Эта величина называется **импульсом тела**:

$$\vec{p} = m \vec{v} . \quad (2.8)$$

Таким образом, **второй закон Ньютона** можно сформулировать следующим образом: *изменение импульса материальной точки равно суммарному импульсу всех сил, к ней приложенных*.

Рассмотрим теперь систему N материальных точек массами m_1, m_2, \dots, m_N , которые могут взаимодействовать одна с другой и с внешними телами, не входящими в данную систему (рис. 2.4). Положение каждой материальной точки в системе задается радиусом-вектором \vec{r}_i в выбранной системе отсчета. Пусть на i -ю точку со стороны k -й действует сила \vec{f}_{ik} . Тогда по третьему закону Ньютона на k -ю точку со стороны i -й действует сила \vec{f}_{ki} , причем $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$. Силы, с которыми тела, входящие в рассматриваемую систему тел, взаимодействуют одно с другим называются **внутренними силами**. Силы, с которыми тела, не входящие в рассматриваемую систему тел, действуют на материальные точки рассматриваемой системы называются **внешними силами** (на рис. 2.4 такие силы обозначены \vec{F}_i). В общем случае на любую материальную точку системы могут

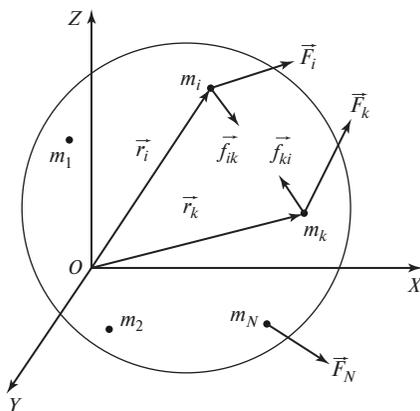


Рис. 2.4

действовать как внутренние, так и внешние силы. Запишем второй закон Ньютона для каждой точки:

$$d\vec{p}_1 = (\vec{F}_1 + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \dots + \vec{f}_{1N})dt;$$

$$d\vec{p}_2 = (\vec{F}_2 + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \dots + \vec{f}_{2N})dt;$$

.....

$$d\vec{p}_N = (\vec{F}_N + \vec{f}_{N2} + \vec{f}_{N3} + \dots + \vec{f}_{NN})dt;$$

где \vec{F}_i — равнодействующая всех внешних сил, действующих на i -ю точку.

Сложив эти уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^N d\vec{p}_i = \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} \right) dt,$$

причем во втором слагаемом правой части полученного выражения отсутствуют члены с индексами $i = k$. **Импульсом системы материальных точек** называется геометрическая сумма импульсов всех ее тел:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i. \quad (2.9)$$

Тогда, поскольку $\sum_{i=1}^N d\vec{p}_i = d \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$, то

$$d\vec{p}_{\text{сист}} = \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} \right) dt.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона $\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} = 0$,

поэтому

$$d\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i dt. \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что импульс системы материальных точек могут изменить только внешние силы, если их геометрическая сумма не равна нулю. Система называется замкнутой, если на систему не

действуют внешние силы. Сформулируем **закон сохранения импульса системы материальных точек**: в замкнутой системе и в случае, когда внешние силы, действующие на систему, скомпенсированы, импульс системы материальных точек сохраняется:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \vec{p}_{\text{сист } 1} = \vec{p}_{\text{сист } 2}, \quad (2.11)$$

где $\vec{p}_{\text{сист } 1}$ — импульс системы тел до начала рассматриваемого взаимодействия; $\vec{p}_{\text{сист } 2}$ — импульс системы тел после окончания рассматриваемого взаимодействия.

Часто внешние силы не скомпенсированы, но сумма их проекций на какое-либо направление равна нулю. Такая система тел называется *условно замкнутой* в данном направлении, и справедлив закон сохранения проекции импульса на это направление. В некоторых задачах взаимодействие тел происходит за очень малое время (удар, взрыв), причем внешние силы малы. Тогда начальный импульс системы примерно равен конечному импульсу системы.

Таким образом, импульс системы тел сохраняется со временем при любых процессах взаимодействия тел внутри замкнутой системы или в определенном классе процессов. Законы сохранения в физике позволяют предсказать поведение системы тел после некоторых сложных процессов в ней, когда для нас не важны детали этих процессов.

Существуют строгие законы сохранения (например, общефизический закон сохранения энергии, законы сохранения импульса, момента импульса, заряда и т.п.) и законы сохранения, справедливые только для ограниченного класса явлений и систем (например, законы сохранения в физике элементарных частиц). Как показала в 1918 г. немецкий математик Э. Нетер, законы сохранения связаны со свойствами симметрии физических систем, которая понимается как инвариантность каких-либо величин по отношению к некоторым математическим преобразованиям.

Следовательно, если известны свойства симметрии физической системы, значит, для нее можно указать закон сохранения. Так, закон сохранения импульса связан с симметрией пространства, в котором движутся тела. Это пространство однородно, а значит, инвариантно относительно переноса начала отсчета. Закон сохранения импульса относится к числу строгих законов, которые справедливы как в макромире, так и в микромире.

2.5. Центр масс системы материальных точек. Уравнение движения центра масс системы материальных точек

В любой системе тел (рис. 2.4) имеется одна замечательная точка, называемая центром масс, которая обладает рядом интересных и важных свойств. Положение центра масс относительно начала O координатной системы определяется радиусом-вектором \vec{r}_C :

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (2.12)$$

где m_i и \vec{r}_i — масса и радиус-вектор i -й материальной точки; M — масса всей системы тел.

Центр масс системы совпадает с ее центром тяжести, если поле сил тяжести в пределах данной системы тел можно считать однородным.

Найдем скорость центра масс, продифференцировав (2.12) по времени:

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i.$$

Если скорость центра масс равна нулю, то говорят, что система в целом покоится. Сама же скорость центра масс имеет смысл скорости движения всей системы как целого. Из последней формулы следует, что

$$\vec{p}_{\text{сист}} = M \vec{v}_C, \quad (2.13)$$

т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Понятие центра масс позволяет придать уравнению (2.10) иную форму, которая часто бывает более удобной. Для этого достаточно подставить (2.13) в (2.10) и учесть, что масса системы тел — постоянная величина. Тогда получим

$$M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}, \quad (2.14)$$

где $\vec{F}_{\text{внеш}}$ — результирующая всех внешних сил, действующих на систему.

Выражение (2.14) называется **уравнением движения центра масс** системы тел. Согласно этому уравнению *центр масс любой системы тел движется так, как если бы вся масса системы была*

сосредоточена в этой точке и к ней были бы приложены все внешние силы системы.

Из (2.14) следует, что если $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, то $d\vec{v}_C/dt = 0$, а значит, что $\vec{v}_C = \text{const}$. Кроме того, в этом случае и импульс системы $\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}$.

Таким образом, если центр масс системы движется равномерно и прямолинейно, то импульс системы сохраняется в процессе движения. Справедливо и обратное утверждение.

Уравнение (2.14) является обобщением основного уравнения динамики материальной точки на систему частиц: ускорение системы как целого пропорционально результирующей всех внешних сил и обратно пропорционально суммарной массе системы.

Рассмотрим движение центра масс системы тел на следующем примере. Снаряд, выпущенный под углом к горизонту, разорвался на некоторой высоте на осколки. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то снаряд и его осколки движутся только под действием единственной силы — силы тяжести. Поэтому траектория центра масс осколков представляет собой траекторию полета снаряда — параболу — до тех пор, пока хотя бы один из осколков не упадет на землю.

2.6. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Как указывалось ранее, основное уравнение динамики (2.2) справедливо только в инерциальных системах отсчета. Между тем имеется много случаев, когда решение интересующей нас задачи необходимо получить в *неинерциальных системах* (например, движение математического маятника в ускоренно движущемся лифте).

Рассмотрим достаточно общий случай, когда неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной с постоянным ускорением \vec{a}_0 . Воспользуемся формулой преобразования ускорений (1.19), в соответствии с которой $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$, где \vec{a}' — ускорение точки в неинерциальной системе, \vec{a} — ускорение той же точки в инерциальной системе. Тогда выражение второго закона Ньютона для материальной точки в неинерциальной системе отсчета будет выглядеть следующим образом:

$$m \vec{a}' = \vec{F} - m \vec{a}_0. \quad (2.15)$$

Это и есть основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета. Из него видно, что даже при $\vec{F} = 0$ тело будет двигаться в этой системе с ускорением, в общем случае отличным от нуля. При этом на тело в неинерциальной системе отсчета как бы действует сила

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0, \quad (2.16)$$

называемая *силой инерции*. Направление силы инерции противоположно направлению \vec{a}_0 . Вспомним, как при резком торможении вагона сила инерции бросает нас вперед, т.е. в сторону, противоположную направлению ускорения поезда.

Следует заметить, что понятие «сила инерции» не попадает под определение понятия «сила», так как сила инерции не является мерой взаимодействия тел. Уравнение (2.15) показывает, что введение сил инерции позволяет сохранить по форме основное уравнение динамики и для неинерциальных систем: слева — произведение массы тела на его ускорение (но уже в неинерциальной системе отсчета), справа — сумма сил. Отметим основные особенности сил инерции:

1. Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета, поэтому на силы инерции третий закон Ньютона не распространяется.
2. Силы инерции существуют только в неинерциальных системах отсчета.
3. Все силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела. Поэтому в однородном поле сил инерции, как и в поле тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс.

Ранее было отмечено, что система отсчета, связанная с земной поверхностью, во многих случаях может считаться практически инерциальной. Однако существует ряд явлений, объяснение которых в этой системе отсчета невозможно без учета ее неинерциальности. Известно, например, что ускорение свободного падения тел на поверхности Земли имеет наибольшее значение у полюсов. Уменьшение этого ускорения при приближении к экватору объясняется не только несферичностью Земли, но и возрастающим действием центробежной силы инерции, которая возникает вследствие наличия у Земли нормального ускорения при ее вращении вокруг оси. Центробежная сила инерции в соответствии с (2.16) направлена противоположно нормальному ускорению точек земной поверхности — перпендикулярно оси вращения Земли.

Глава 3

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ В МЕХАНИКЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Понятие энергии является одним из основных понятий в физике. Хотя с различными видами энергии мы встречаемся на каждом шагу, дать точное определение энергии довольно трудно. Более того, в своих лекциях крупный американский физик Р. Фейнман пишет, что «физике сегодняшнего дня неизвестно, что такое «энергия». В этом смысле понятие энергии относится к числу первичных понятий физики. Однако можно сказать, что *энергия* — это общая количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи. Различным формам движения материи соответствуют и различные виды энергии: механическая, внутренняя, электромагнитная, ядерная и т.д. Каждый раздел физики оперирует со своим видом энергии. Фундаментальный закон природы является *общезначимый закон сохранения энергии*: в изолированной системе энергия может переходить из одной формы в другую, но ее количество остается постоянным.

Этот закон относится к числу строгих законов (применимых как в макромире, так и в микромире), не имеющих в настоящее время никаких отступлений. Закон является обобщением опыта человечества за всю его историю изучения природы. Он связан с однородностью времени, т.е. с тем фактом, что все моменты времени эквивалентны, и физические законы не меняются со временем. Окончательно закон был сформулирован в середине XIX в. трудами выдающихся физиков Р. Майера, Д. Джоуля и Г. Гельмгольца.

3.1. Механическая работа

В курсе механики нас будет интересовать *механическая энергия* тела $W_{\text{мех}}$, которая определяется как сумма потенциальной $W_{\text{п}}$ и кинетической $W_{\text{к}}$ энергий:

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{п}} + W_{\text{к}}. \quad (3.1)$$

Механическая энергия системы может меняться под действием сил, действующих как внутри системы, так и на нее. Для количественного описания изменения механической энергии вводится понятие работы силы. Подчеркнем, что энергия и работа это разные физи-

ческие понятия (хотя и имеющие, как мы увидим в дальнейшем, одинаковую размерность). Энергия характеризует состояние системы, а работа — количественная характеристика преобразования энергии в физических процессах.

Рассмотрим прямолинейное движение тела из положения 1 в положение 2 под действием постоянной силы \vec{F} (рис. 3.1). Если тело совершило перемещение $\Delta\vec{r}$, то *механической работой постоянной силы* называется скалярное произведение силы на перемещение:

$$A(F) = \vec{F} \Delta\vec{r} = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Если известны проекции векторов \vec{F} и $\Delta\vec{r}$, то (3.2) можно переписать в виде

$$A(F) = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z.$$

Рассмотрим теперь перемещение тела вдоль произвольной траектории, если к телу приложена сила \vec{F} , изменяющаяся во времени (рис. 3.2). Разобьем траекторию на такие малые участки, чтобы на каждом участке силу можно было считать постоянной. Тогда на i -м участке малая работа силы \vec{F}_i (обозначим ее δA_i) может быть вычислена по формуле $\delta A_i = \vec{F}_i \Delta\vec{r}_i$. Вся работа силы по перемещению тела из положения 1 в положение 2 будет равна сумме работ на отдельных участках: $A = \sum_i \delta A_i = \sum_i (\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i)$. Совпадение вычисленного результата с истинным будет тем более полным, чем меньшие векторы $\Delta\vec{r}_i$ будем рассматривать. Поэтому определение *механи-*

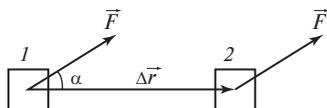


Рис. 3.1

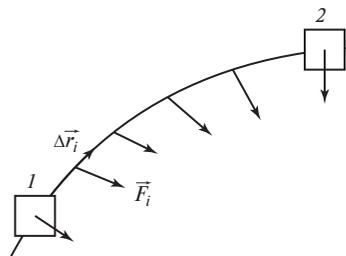


Рис. 3.2

ческой работы произвольной силы при движении тела можно представить следующим образом:

$$A = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i (\vec{F}_i \Delta \vec{r}_i) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}. \quad (3.3)$$

Такой интеграл носит название *криволинейного интеграла вдоль траектории*. Если выбрана система координат и начальному 1 и конечному 2 положениям тела соответствуют радиусы-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , то можно записать, что

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r}.$$

Единицей измерения работы в СИ является джоуль (Дж). Джоуль — это работа, совершаемая силой 1 Н по перемещению тела на 1 м в направлении действия силы. Работа — величина алгебраическая, ее знак определяется знаком косинуса угла между направлением силы и направлением перемещения тела.

Пусть на материальную точку действуют несколько сил \vec{F}_i , где $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда равнодействующая \vec{R} этих сил определяется как

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad \text{Умножим это равенство скалярно на } d\vec{r}:$$

$$\vec{R} d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}. \quad \text{Если точка перемещается из положения, определен-$$

ного радиусом-вектором \vec{r}_1 , в положение, определенное радиусом-вектором \vec{r}_2 , то полученное соотношение можно проинтегрировать:

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{R} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_{i=1}^N A(\vec{F}_i).$$

Это выражение доказывает следующую теорему: работа равнодействующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемой каждой из сил в отдельности.

3.2. Силовое поле. Потенциальные и непотенциальные силы. Критерий потенциальности поля сил

Силовым полем называется часть пространства (ограниченная или неограниченная), в каждой точке которой на помещенное туда материальное тело действует сила, модуль и направление которой зависят либо только от координат этого тела, либо от координат и времени. В первом случае силовое поле называется **стационарным**, во втором — **нестационарным**. Если же сила во всех точках силового поля имеет одно и то же значение и направление, то силовое поле называется **однородным**. Понятие поля было введено в физику английским ученым М. Фарадеем (1791—1867), что, по мнению А. Эйнштейна, было «самым важным открытием со времен Ньютона». В нашем курсе будем рассматривать гравитационное поле, электромагнитное поле, поле ядерных сил и т.д.

Существует особый класс полей, называемых **потенциальными**. **Сила поля, действующая на тело, называется потенциальной, если работа этой силы зависит только от начального и конечного положения тела и не зависит ни от вида траектории, ни от закона движения тела.**

Пусть материальная точка перемещается в потенциальном поле из положения 1 в положение 2 (рис. 3.3). Работа силы поля \vec{F} на траектории a равна работе силы поля \vec{F} на траектории b по определению: $A(F)_{1-a-2} = A(F)_{1-b-2}$.

Но, поскольку $\cos \alpha = -\cos \beta$, то $A(F)_{1-b-2} = -A(F)_{2-b-1}$. Тогда нетрудно получить, что $A(F)_{1-a-2} + A(F)_{2-b-1} = 0$, т.е. $A(F)_{1-a-2-b-1} = 0$. Таким образом, работа потенциальной силы по замкнутой траектории $1-a-2-b-1$ равна нулю. Так как траектории a и b были произвольными, то можно сказать, что **работа потенциальной силы на любой замкнутой траекто-**

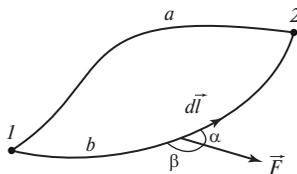


Рис. 3.3

рии L всегда равна нулю. Эту фразу можно коротко записать следующим образом:

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0. \quad (3.4)$$

Такой интеграл носит название *циркуляции* вектора \vec{F} по замкнутому контуру L , а полученное выражение дает критерий потенциальности поля сил.

Существует особый класс сил, линия действия которых проходит всегда через одну и ту же точку (центр), а модуль этих сил зависит только от расстояния до этой точки. Такие силы называются **центральными**. Примеры таких сил — сила тяжести, кулоновская, сила упругости и др. Центральные силы являются потенциальными.

Пусть на материальную точку действует центральная сила \vec{F} , линия действия которой проходит через точку O (рис. 3.4). Материальная точка перемещается по траектории a из положения 1 в положение 2, определяемые соответствующими радиусами-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2

(начало координат поместим в точку O). Тогда работа силы \vec{F} будет определяться по формуле (3.3). Если существует первообразная f подинтегральной функции F , то, согласно формуле Ньютона—Лейбница можно написать $A(F) = f(r_2) - f(r_1)$. Откуда видно, что работа

силы \vec{F} определяется только координатами точек 1 и 2. Для любой другой траектории b , проходящей через эти же точки, получается такое же выражение для работы, т.е. работа не зависит от вида траектории, а определяется начальным и конечным положением точки приложения силы. Следовательно, так как гравитационная, упругая и кулоновская силы центральные, то соответствующие им поля являются потенциальными.

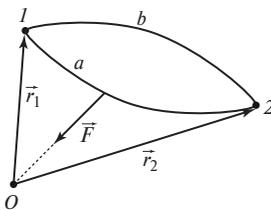


Рис. 3.4

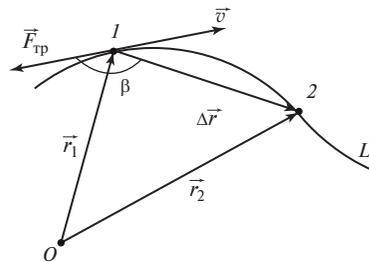


Рис. 3.5

Рассмотрим работу силы трения скольжения (рис. 3.5). Если $\Delta \vec{r}$ — перемещение за время Δt , то работа силы трения скольжения находится по формуле

$$A(F_{\text{тр}}) = \vec{F}_{\text{тр}} \Delta \vec{r} = F_{\text{тр}} \Delta r \cos \beta.$$

Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени dt . Модуль перемещения тела за этот промежуток стремится к пройденному пути, в то время как направление силы трения противоположно направлению вектора перемещения.

Тогда получаем $\delta A(F_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}} dS$. Полная работа на пути S будет вычислена следующим образом:

$$A(F_{\text{тр}}) = - \int_0^S F_{\text{тр}} dS. \quad (3.5)$$

Видно, что работа силы трения скольжения зависит от пути интегрирования и является отрицательной. Как будет показано далее, сила трения скольжения всегда приводит к убыли механической энергии тела, поэтому эту силу называют *диссипативной*.

3.3. Кинетическая энергия материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии

Пусть материальная точка движется из положения 1, где она имела скорость \vec{v}_1 , в положение 2, где скорость стала равной \vec{v}_2 . Обозначим равнодействующую всех сил, приложенных к точке, через \vec{R} и найдем ее работу по перемещению тела. Учтем соотношение (2.10) и получим

$$A(\vec{R}) = \int_1^2 \vec{R} d\vec{r} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \int_1^2 d\vec{p} \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_1^2 \vec{v} d\vec{p}.$$

Напомним, что скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату модуля этого вектора: $\vec{v} \vec{v} = v^2$. Поэтому

$$A(\vec{R}) = \int_1^2 \vec{v} d(m\vec{v}) = \int_1^2 d(mv^2/2) = mv_2^2/2 - mv_1^2/2.$$

В приведенном выводе рассмотрен нерелятивистский случай движения ($v \ll c$), поэтому $m = \text{const}$.

Величина $\frac{mv^2}{2}$ называется *кинетической энергией* W_k материальной точки. Так как работа равнодействующей силы равна сумме работ сил, то можно записать, что

$$\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} = \sum_{i=1}^N A(\vec{F}_i). \quad (3.6)$$

Таким образом, доказана теорема об изменении кинетической энергии: *изменение кинетической энергии материальной точки равно алгебраической сумме работ всех приложенных к ней сил.*

Рассмотрим теперь систему материальных точек. Кинетической энергией системы тел называется сумма кинетических энергий всех тел, входящих в эту систему: $W_{\text{к.сист}} = \sum \frac{mv^2}{2}$. Запишем теорему об изменении кинетической энергии для каждой точки, входящей в эту систему. Тогда для j -й точки получаем уравнение

$$\Delta W_{kj} = \sum_{i=1}^N A(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^N A(\vec{f}_i),$$

в котором \vec{F} — внешние силы, действующие на эту точку; \vec{f} — внутренние силы. Сложив все уравнения, получим:

$$\Delta W_{\text{к.сист}} = \sum A(\vec{F}) + \sum A(\vec{f}). \quad (3.7)$$

Изменение кинетической энергии системы материальных точек определяется работой как внутренних, так и внешних сил. Напомним, что изменение импульса системы материальных точек определяется импульсом только внешних сил (2.10).

3.4. Потенциальная энергия взаимодействия

Пусть задана система материальных точек, между которыми действуют только потенциальные силы. Если система под действием этих сил перешла из одного состояния в другое (изменились положения тел, их скорости и т.п.), то потенциальные силы совершили работу, которая не зависит от того, каким образом осуществилось изменение состояния системы. Работа потенциальных сил зависит только от начального и конечного состояний системы. Поэтому эту работу можно взять в качестве характеристики изменения состояния системы тел.

Введем *потенциальную энергию* системы тел $W_{\text{п}}$, которая связана с работой потенциальных сил по следующему правилу:

$$W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2} = A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}), \quad (3.8)$$

где $W_{\text{п}1}$ — потенциальная энергия системы тел в состоянии 1; $W_{\text{п}2}$ — потенциальная энергия системы тел в состоянии 2; $A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}})$ — работа потенциальных сил взаимодействия при переходе системы из состояния 1 в состояние 2. Это правило можно переписать в виде:

$$\Delta W_{\text{п}} = -A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}) \quad \text{или} \quad dW_{\text{п}} = -\delta A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}).$$

Из последнего выражения видно, что работа потенциальных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии системы. *Изменение потенциальной энергии системы тел, между которыми действуют потенциальные силы, равно взятой с обратным знаком работе этих сил при переходе системы из одного состояния в другое.*

Физический смысл имеет только изменение потенциальной энергии, однако часто говорят о потенциальной энергии системы в данном состоянии. В этом случае потенциальная энергия в одном из состояний условно принимается за нуль (нулевой потенциальный уровень). Пусть $W_{\text{п}1} = 0$, тогда $W_{\text{п}2} = -A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}) = A_{2 \rightarrow 1}(f_{\text{п}})$. Таким образом, можно сказать, что потенциальная энергия системы в некотором состоянии равна работе потенциальных сил при переходе системы из этого состояния в состояние, в котором значение потенциальной энергии условно принято за нулевое.

В качестве примера рассмотрим изменение потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами M и m при удалении одной от другой, когда расстояние между ними увеличивается от r_1 до r_2 (рис. 3.6). Допустим, что тело массой M создает гравитационное поле, а тело массой m перемещается в этом поле из точки 1 в точку 2. Точки находятся на расстояниях r_1 и r_2 соответственно от массы, создающей поле. Поскольку гравитационная сила — центральная, то перемещение массы m может осуществляться по любой траектории. Работа гравитационной силы не зависит от формы траектории движения тела, а рассчитывать ее удобнее

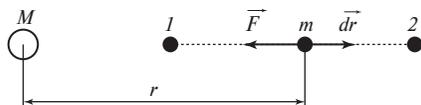


Рис. 3.6

при прямолинейном движении. На малом перемещении $d\vec{r}$ элементарная работа

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \pi = -F dr.$$

Тогда изменение потенциальной энергии

$$\Delta W_{\text{п}} = -\int_1^2 \delta A = \int_1^2 F dr = \int_1^2 G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Рассмотрим на данном примере выбор нулевого уровня потенциальной энергии.

Первый способ. В физике часто встречаются силы, модуль которых с увеличением расстояния между взаимодействующими телами уменьшается и при $r \rightarrow \infty$ достаточно быстро стремится к нулю. К таким силам относится сила гравитационного взаимодействия. В таких задачах обычно потенциальную энергию принимают равной нулю «на бесконечности», т.е. в положении системы, когда тела удалены одно от другого бесконечно далеко. Пусть в рассматриваемом примере точка 2 находится «на бесконечности», тогда $W_{\text{п}2} = 0$. В этом случае получим:

$$W_{\text{п}1} = -GMm/r_1 \quad \text{или} \quad W_{\text{п}} = -GMm/r.$$

Этой зависимости потенциальной энергии гравитационного взаимодействия материальной точки m , находящейся на произвольном расстоянии r от массы M , соответствует график, показанный на рис. 3.7, а.

Второй способ. Примем потенциальную энергию системы равной нулю во втором положении системы, т.е. при $r = r_2$. Тогда $W_{\text{п}1} = -GMm/r_1 + GMm/r_2$, причем второе слагаемое в этой формуле — некоторая постоянная величина: $GMm/r_2 = C$. Потенциальная

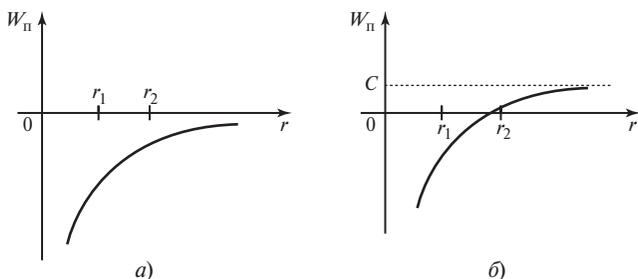


Рис. 3.7

энергия гравитационного взаимодействия на произвольном расстоянии r между телами может быть представлена в виде $W_{\Pi} = -GMm/r_1 + C$. График, соответствующий этой зависимости, представлен на рис. 3.7, б.

Из последней формулы видно, что потенциальная энергия определена с точностью до некоторого постоянного значения, которое зависит от выбора нулевого потенциального уровня. Этот выбор в каждой конкретной задаче осуществляется индивидуально. При этом, решая задачу, обычно исходят из того, что выражение потенциальной энергии в произвольной конфигурации системы должно выглядеть наиболее просто. Поэтому в нашем примере первый способ выбора нулевого потенциального уровня является наиболее рациональным, а потому и общепринятым.

В качестве еще одного примера рассмотрим гравитационное поле Земли, радиус которой R , а масса M . Можно показать, что если расстояние до центра Земли $r > R$, то гравитационное поле, создаваемое Землей, такое же, как если бы вся масса Земли была бы сосредоточена в ее центре. Пусть тело массы m перемещается из точки 1, находящейся на расстоянии $r_1 = R$ от центра Земли, в точку 2, находящуюся на высоте h над поверхностью планеты ($r_2 = R + h$). Найдем изменение его потенциальной энергии. Выберем нулевой потенциальный уровень на поверхности Земли в точке 1. Тогда $W_{\Pi 1} = 0$. След-

$$\text{довательно, } W_{\Pi 2} = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{GMmh}{R(R+h)}.$$

Если $h \ll R$, то $W_{\Pi 2} = GMmh/R^2$, а так как $g = GM/R^2$, то $W_{\Pi 2} = mgh$. Эта формула часто использовалась в школьных задачах. Обратите внимание на условие, при котором она справедлива!

Рассмотрим потенциальную энергию упруго деформированной пружины. Пусть пружина имеет жесткость k , тогда упругая сила записывается в соответствии с выражением (2.6). Пусть пружина растянута на длину x . Найдем изменение потенциальной энергии:

$$\Delta W_{\Pi} = - \int_1^2 \vec{F}_{\text{упр}} d\vec{r} = - \int_0^x \vec{F}_{\text{упр}} dx \cos \pi = - \int_0^x kx dx \cos \pi = kx^2/2.$$

Если нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбрать в том положении, когда пружина не растянута, то

$$W_{\Pi} = kx^2/2.$$

3.5. Дифференциальная связь между потенциальной силой и потенциальной энергией. Понятие градиента

В § 3.4 была получена интегральная связь между изменением потенциальной энергии и потенциальной силой:

$$\Delta W_{\text{п}} = - \int_1^2 \vec{F}_{\text{пот}} \, d\vec{r} \quad .$$

Решим обратную задачу: зная значение потенциальной энергии (по отношению к заранее выбранному нулевому уровню), которой обладает материальная точка, помещенная в силовое потенциальное поле, найдем значение потенциальной силы. Рассмотрим бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$. Изменение потенциальной энергии на этом перемещении будет

$$dW_{\text{п}} = - \vec{F} \, d\vec{r} = - (F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz).$$

Пусть перемещение тела происходит только вдоль оси Ox так, что $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$. Тогда $F_x = - \frac{dW_{\text{п}}}{dx}$. Производная функции, когда при дифференцировании по одной из переменных (в нашем случае по x) остальные переменные считаются постоянными, называется *частной производной* и обозначается $\frac{\partial}{\partial x}$. Таким образом, $F_x = - \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x}$. Аналогично, $F_y = - \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y}$ и $F_z = - \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z}$. Тогда вектор силы можно представить следующим образом:

$$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_z = - \left(\vec{i} \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z} \right). \quad (3.9)$$

Вектор, компоненты которого равны соответствующим частным производным скалярной величины по координатам, носит название *градиента скалярной функции* (обозначается символом grad). Таким образом,

$$\vec{F} = - \text{grad } W_{\text{п}}. \quad (3.10)$$

Часто для обозначения градиента вводят так называемый оператор Гамильтона, равный по определению

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.11)$$

Потенциальную силу можно представить следующим образом:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W_{\Pi}. \quad (3.12)$$

Можно показать (это будет сделано в курсе математики), что вектор $\vec{\nabla} W_{\Pi}$ направлен в сторону максимального возрастания функции W_{Π} .

3.6. Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим систему материальных точек, между которыми могут действовать как потенциальные, так и непотенциальные силы. Эти силы могут быть как внешними (обозначим их \vec{F}), так и внутренними (обозначим их \vec{f}). Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для системы материальных точек (3.6):

$$\Delta W_{\text{к}} = A(\vec{f}_{\Pi}) + A(\vec{f}_{\text{неп}}) + A(\vec{F}_{\Pi}) + A(\vec{F}_{\text{неп}}),$$

где $\Delta W_{\text{к}}$ — изменение кинетической энергии рассматриваемой системы; $A(\vec{f}_{\Pi})$ — сумма работ всех внутренних потенциальных сил; $A(\vec{f}_{\text{неп}})$ — сумма работ всех внутренних непотенциальных сил; $A(\vec{F}_{\Pi})$ — сумма работ всех внешних потенциальных сил; $A(\vec{F}_{\text{неп}})$ — сумма работ всех внешних непотенциальных сил.

Перепишем равенство следующим образом:

$$\Delta W_{\text{к}} + [-A(\vec{f}_{\Pi})] + [-A(\vec{F}_{\Pi})] = A(\vec{f}_{\text{неп}}) + A(\vec{F}_{\text{неп}}).$$

Слагаемое $[-A(\vec{f}_{\Pi})]$ представляет собой изменение потенциальной энергии взаимодействия тел системы за счет работы внутренних потенциальных сил. Слагаемое $[-A(\vec{F}_{\Pi})]$ представляет собой изменение потенциальной энергии взаимодействия тел системы за счет работы внешних потенциальных сил. Можно записать в целом, что $\Delta W_{\Pi} = -A(\vec{f}_{\Pi}) - A(\vec{F}_{\Pi})$. Тогда теорему об изменении кинетической энергии можно представить следующим образом:

$$\Delta W_{\text{к}} + \Delta W_{\Pi} = A(\vec{f}_{\text{неп}}) + A(\vec{F}_{\text{неп}}).$$

Поскольку сумма кинетической и потенциальной энергий называется механической энергией, то $\Delta W_{\text{к}} + \Delta W_{\text{п}} = \Delta W_{\text{мех}}$. Окончательно можно сформулировать равенство:

$$\Delta W_{\text{мех}} = A(\vec{f}_{\text{неп}}) + A(\vec{F}_{\text{неп}}). \quad (3.13)$$

Таким образом, *изменение механической энергии системы материальных точек равно сумме работ внутренних и внешних непотенциальных сил*. Выражение (3.13) является математической записью **закона сохранения механической энергии**.

Закон сохранения механической энергии утверждает, что если работа внутренних и внешних непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы не меняется.

Замечание 1. Данный вывод справедлив, если потенциальные силы являются стационарными, т.е. если их модуль и направление не зависят от времени.

Замечание 2. Если внутри системы действуют только стационарные потенциальные силы, то *система называется консервативной*. Можно сказать, что механическая энергия сохраняется, если система консервативная и замкнутая. Однако это требование более сильное, чем то, которое требуется в нашем условии выполнимости закона сохранения механической энергии.

Замечание 3. Если внутри системы или на нее действуют диссипативные силы, то механическая энергия системы сохраняться не может, если не работают внешние силы, работа которых восполняет убыль энергии в системе.

Замечание 4. Закон сохранения механической энергии справедлив только в инерциальной системе отсчета. Это следует из того факта, что закон был получен на основании теоремы об изменении кинетической энергии, которая сама являлась следствием второго закона Ньютона, который выполняется в инерциальной системе отсчета.

Замечание 5. Можно показать, что закон сохранения механической энергии следует из однородности времени, которая проявляется в том, что разные моменты времени одинаковы. Это означает, что два одинаковых эксперимента, поставленные в одинаковых условиях, приведут к одному и тому же результату.

Замечание 6. Следует еще раз подчеркнуть, что общезначимый закон сохранения энергии справедлив всегда без ограничений.

Глава 4

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривая вращательное движение твердого тела, состоящего из совокупности материальных точек, необходимо сделать важные замечания, которые свидетельствуют о сложности использования ранее полученных динамических уравнений для описания движения тела. Во-первых, для описания вращательного движения совокупности материальных точек весьма сложно использовать систему уравнений второго закона Ньютона, записанных в виде (2.2). При вращении точек вокруг какой-либо оси ускорения всех точек тела отличаются и по направлению, и по модулю. Во-вторых, в этом случае сложно использовать и систему динамических уравнений в виде (2.10), т.е. второй закон Ньютона, записанный в терминологии «импульсов». При вращении точек твердого тела вокруг оси даже с постоянной угловой скоростью линейные скорости точек, а значит, и импульсы, различаются и по модулю, и по направлению. Введем новые физические величины, характеризующие вращение твердого тела.

4.1. Момент импульса точки относительно полюса

Рассмотрим вращение материальной точки массой m вокруг некоторой оси по окружности радиусом R под действием силы \vec{F} (рис. 4.1). Положение точки определяется радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из произвольного полюса O , лежащего на оси вращения.

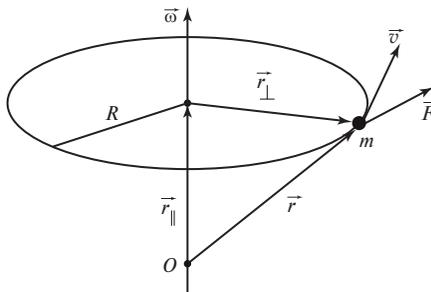


Рис. 4.1

Запишем для данной точки выражение второго закона Ньютона:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Умножим обе части этого уравнения векторно на \vec{r} :

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.1)$$

Левую часть полученного выражения можно представить в виде

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, m\vec{v}].$$

*Векторное произведение радиуса-вектора материальной точки, проведенного из полюса, на импульс этой точки называется **моментом импульса материальной точки относительно полюса**:*

$$\vec{l}_O = [\vec{r}, m\vec{v}]. \quad (4.2)$$

Таким образом, левая часть выражения (4.1) определяет скорость изменения момента импульса материальной точки относительно полюса.

Чтобы проанализировать модуль и направление вектора момента импульса, учтем соотношение (1.13). Разложим вектор \vec{r} на два взаимно перпендикулярных вектора, один из которых сонаправлен с осью вращения (обозначим его \vec{r}_{\parallel}), а другой — перпендикулярен ей (обозначим его \vec{r}_{\perp}) (рис. 4.1). Тогда

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\parallel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp}.$$

Поскольку векторы $\vec{\omega}$ и \vec{r}_{\parallel} параллельны, то их векторное произведение равно нулю. Таким образом,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp}.$$

Получаем выражение для момента импульса точки в виде

$$\vec{l}_O = [\vec{r}, m\vec{v}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = m[(\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}), [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}]].$$

Поскольку векторное произведение обладает дистрибутивностью, то

$$\begin{aligned} \vec{l}_O &= m[(\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}), [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}]] = \\ &= m[\vec{r}_{\perp}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}]] + m[\vec{r}_{\parallel}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}]]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Полученные в правой части уравнения слагаемые в математике называются *двойным векторным произведением*. В курсе векторной алгебры доказывается, что результат двойного векторного произведения — это вектор, определяемый по следующему правилу:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}).$$

Первое слагаемое выражения (4.3) перепишем в таком виде:

$$m[\vec{r}_\perp, [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp]] = m(\vec{\omega}(\vec{r}_\perp, \vec{r}_\perp) - \vec{r}_\perp(\vec{r}_\perp, \vec{\omega})).$$

Напомним, что скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату модуля вектора: $(\vec{r}_\perp, \vec{r}_\perp) = r_\perp^2$. Направления векторов \vec{r}_\perp и $\vec{\omega}$ указаны на рис. 4.1, эти векторы перпендикулярны один другому, поэтому скалярное произведение $(\vec{r}_\perp, \vec{\omega})$ равно нулю. Окончательно имеем:

$$m[\vec{r}_\perp, [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp]] = mr_\perp^2 \vec{\omega}.$$

Из полученного выражения следует, что одна составляющая вектора момента импульса материальной точки относительно произвольного полюса, лежащего на оси вращения, сонаправлена с вектором угловой скорости этой точки при ее вращении вокруг оси, обозначим ее $\vec{l}_{O\parallel}$:

$$\vec{l}_{O\parallel} = mr_\perp^2 \vec{\omega}. \quad (4.4)$$

Рассмотрим другую составляющую — второе слагаемое выражения (4.3):

$$m[\vec{r}_\parallel, [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp]] = m(\vec{\omega}(\vec{r}_\parallel, \vec{r}_\perp) - \vec{r}_\perp(\vec{r}_\parallel, \vec{\omega})).$$

Поскольку $\vec{r}_\parallel \perp \vec{r}_\perp$, то $(\vec{r}_\parallel, \vec{r}_\perp) = 0$, а поэтому $m[\vec{r}_\parallel, [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp]] = -mr_\parallel \omega \vec{r}_\perp$. Таким образом, вторая составляющая вектора момента импульса материальной точки относительно произвольного полюса, лежащего на оси вращения, перпендикулярна оси вращения и направлена к центру вращения. Обозначим ее $\vec{l}_{O\perp}$:

$$\vec{l}_{O\perp} = -mr_\parallel \omega \vec{r}_\perp. \quad (4.5)$$

Объединив выражения (4.4) и (4.5), запишем уравнение для определения момента импульса материальной точки относительно полюса:

$$\vec{l}_O = \vec{l}_{O\parallel} + \vec{l}_{O\perp} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega} - mr_{\parallel} \omega \vec{r}_{\perp}. \quad (4.6)$$

Последнее равенство проиллюстрировано на рис. 4.2. Размерность момента импульса в СИ: $[l_O] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$.

Вернемся к выражению (4.1) и рассмотрим его правую часть. *Векторное произведение радиуса-вектора точки, проведенного из полюса, на вектор силы называется моментом силы относительно полюса*, которое обозначается \vec{M}_O :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.7)$$

Модуль момента силы (рис. 4.3) $M_O = rF \sin \alpha = Fh$, где $h = r \sin \alpha$ — длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы, — называется *плечом силы*. Рассмотрим основные свойства вектора \vec{M}_O .

1. Момент силы относительно полюса не меняется при переносе силы вдоль линии ее действия, поскольку при этом не меняется плечо силы.

2. Момент равнодействующей нескольких сил равен сумме моментов каждой силы относительно полюса. Действительно, согласно свойству дистрибутивности векторного произведения

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r} \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{O_i}.$$

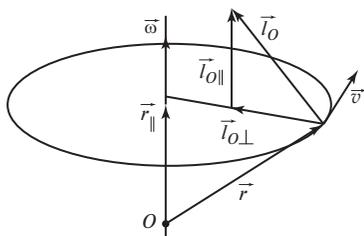


Рис. 4.2

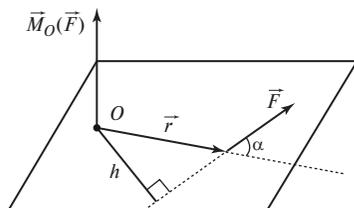


Рис. 4.3

Таким образом, выражение (4.1) может быть записано в виде

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{O_i}, \quad (4.8)$$

т.е. *скорость изменения момента импульса материальной точки равна суммарному моменту сил, действующих на нее*. Соотношение (4.8) называется **основным уравнением динамики вращательного движения материальной точки** или **уравнением моментов**.

В качестве примера можно рассмотреть движение планеты вокруг Солнца под действием гравитационной силы. Момент, создаваемый силой гравитации относительно полюса, расположенного в центре орбиты (Солнце), определяется по формуле

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{гп}}$$

Поскольку центральная сила направлена к центру, то $\vec{r} \parallel \vec{F}_{\text{гп}}$, а поэтому $\vec{r} \times \vec{F}_{\text{гп}} = 0$. Следовательно, момент импульса планеты $\vec{l}_O = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$. Таким образом, либо планета будет двигаться по окружности (когда $r = \text{const}$) с постоянной по модулю скоростью, либо по некруговой, но плоской траектории (чтобы осталось постоянным направление вектора \vec{l}_O). Вывод: материальная точка в поле центральных сил может двигаться только по плоской траектории.

4.2. Момент импульса системы материальных точек относительно полюса

Составим для системы материальных точек основное уравнение динамики вращения вокруг общей оси. Запишем для каждой точки системы соотношение (4.8):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}_{O1}}{dt} &= [\vec{r}_1, \vec{R}_1]; \\ \frac{d\vec{l}_{O2}}{dt} &= [\vec{r}_2, \vec{R}_2]; \\ &\dots \\ \frac{d\vec{l}_{ON}}{dt} &= [\vec{r}_N, \vec{R}_N], \end{aligned}$$

где \vec{l}_{O_i} — момент импульса i -й точки; \vec{r}_i — ее радиус-вектор; \vec{R}_i — равнодействующая всех сил, действующих на i -ю точку; N — число точек системы.

Просуммируем все составленные уравнения. Тогда левая часть полученной суммы будет выражена в виде

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Моментом импульса системы точек относительно полюса называется векторная сумма моментов импульсов каждой материальной точки системы относительно этого полюса:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{l}_{O_i} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]. \quad (4.9)$$

Тогда

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{R}_i]. \quad (4.10)$$

Равнодействующая всех сил, действующих на i -ю точку системы, определяется векторной суммой внешних \vec{F}_i и внутренних \vec{f}_{ik} сил:

$$\vec{R}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik}.$$

Поэтому (4.10) перепишем в виде

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i, \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} \right].$$

Второе слагаемое в последнем уравнении определяет суммарный момент внутренних сил системы. Покажем, что он равен нулю. Для этого рассмотрим произвольную пару внутренних сил, действующих между i -й и k -й точками (рис. 4.4). Поскольку эти силы подчиняются третьему закону Ньютона, то $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$. Поэтому сумма их моментов относительно точки O определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_{ki} &= [\vec{r}_i, \vec{f}_{ik}] + [\vec{r}_k, \vec{f}_{ki}] = \\ &= [\vec{r}_i, \vec{f}_{ik}] - [\vec{r}_k, \vec{f}_{ik}] = [(\vec{r}_i - \vec{r}_k), \vec{f}_{ik}]. \end{aligned}$$

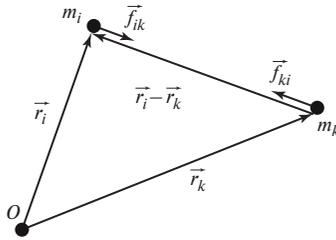


Рис. 4. 4

Векторы \vec{f}_{ik} и $(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ параллельны, поэтому их векторное произведение равно нулю.

Таким образом, получили следующее выражение:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \vec{M}_O \text{ внеш.} \quad (4.11)$$

Данное уравнение называется **основным уравнением динамики вращательного движения системы материальных точек** или **уравнением моментов**: скорость изменения момента импульса системы материальных точек равна суммарному моменту внешних сил, действующих на нее.

Из выражения (4.11) следует, что *если суммарный момент внешних сил, действующих на систему точек, равен нулю, то момент импульса такой системы остается постоянным*. Это — **закон сохранения момента импульса** системы материальных точек. Изменить момент импульса системы могут не внешние силы, а их момент. Вспомним, что отсутствие внешних сил, действующих на систему, приводит к постоянству ее импульса (2.10).

Закон сохранения момента импульса есть следствие изотропии пространства относительно поворота осей координат: поворот осей координат не влияет на взаимодействие внутри системы тел. Докажем это. Повернем оси координат некоторой системы отсчета на угол $d\vec{\varphi}$. При этом i -я точка системы тел совершит перемещение $d\vec{r}_i$, причем в соответствии с (1.12) $d\vec{r}_i = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i$. Тогда можно сказать, что внешние силы, действующие на i -ю точку, совершили работу $\delta A = \vec{F}_i d\vec{r}_i$. Поэтому $\delta A = \vec{F}_i (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i)$.

Полученное выражение в математике носит название смешанного произведения векторов. Оказывается, оно обладает замечательным свойством:

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}),$$

т.е. круговая перестановка его сомножителей не меняет результат произведения. Поэтому

$$\delta A = \vec{F}_i(d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) = d\vec{\varphi}(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = d\vec{\varphi} \vec{M}.$$

Поскольку энергия системы при повороте осей координат не изменилась (не изменился характер взаимодействий в системе), то $\delta A = 0$. А поскольку $d\vec{\varphi} \neq 0$, то $\vec{M} = 0$, а поэтому $L_O = \text{const}$.

4.3. Момент импульса относительно оси

Рассмотрим вращение материальной точки вокруг оси OZ (рис. 4.5). Выбрав произвольный полюс на этой оси (точка O), найдем вектор \vec{l}_O — момент импульса данной точки относительно этого полюса. *Моментом импульса точки относительно оси OZ* называется скалярная величина l_z — проекция на данную ось момента импульса точки относительно произвольного полюса, принадлежащего этой оси:

$$l_z = \text{Пр}_{OZ} \vec{l}_O. \quad (4.12)$$

Ранее (4.4) мы определили, что $\vec{l}_{O\parallel} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega}$. Поэтому

$$l_z = mr_{\perp}^2 \omega_z. \quad (4.13)$$

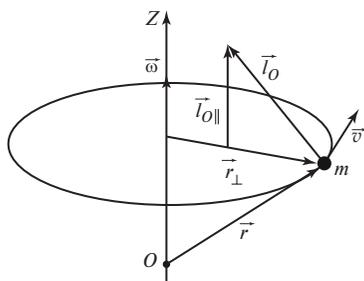


Рис. 4.5

Подставив (4.13) в (4.8), получим:

$$\frac{dl_z}{dt} = mr_{\perp}^2 \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{i=1}^N M_{zi}. \quad (4.14)$$

Вспомним определение углового ускорения и перепишем (4.14) в виде:

$$mr_{\perp}^2 \varepsilon_z = \sum_{i=1}^N M_{zi}, \quad \text{или} \quad \varepsilon_z = \frac{\sum_{i=1}^N M_{zi}}{mr_{\perp}^2}.$$

Проекция углового ускорения материальной точки на ось вращения пропорциональна проекции на эту ось суммы моментов сил, действующих на точку. Коэффициентом пропорциональности в этом соотношении выступает величина mr_{\perp}^2 . *Произведение массы материальной точки на квадрат расстояния точки до оси вращения называется моментом инерции материальной точки относительно оси:*

$$I_z = mr_{\perp}^2, \quad (4.15)$$

где индекс «z» указывает на выбранную ось. Момент инерции — скалярная величина, его размерность в СИ $[I_z] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Представим (4.14) в виде:

$$I_z \varepsilon_z = \sum_{i=1}^N M_{zi}. \quad (4.16)$$

Это иная форма записи **основного уравнения динамики вращательного движения** материальной точки (4.8) в скалярном виде. Из этого соотношения следует физический смысл момента инерции. *Момент инерции — мера инертности материальной точки во вращательном движении*, он определяет момент сил, который должен быть приложен к телу для придания ему определенного углового ускорения. Вспомним, что при рассмотрении поступательного движения мерой инертности тела выступает масса тела.

Введение понятия момента инерции позволяет (4.4) записать таким образом: $I_z = I_z \omega_z$. Сопоставив это выражение с выражением импульса материальной точки, можно также рассмотреть аналогию понятий: импульс — момент импульса, масса — момент инерции, скорость — угловая скорость.

4.4. Момент инерции твердого тела

Поскольку твердое тело представляет собой совокупность материальных точек, то при его вращении вокруг какой-либо оси уравнение (4.13) можно записать для каждой точки тела:

$$l_{zi} = dm_i r_{\perp i}^2 \omega_z,$$

где dm_i — масса материальной точки, на которые разбивается твердое тело. Здесь учтено, что при вращении твердого тела угловые скорости всех его точек одинаковы. Тогда, просуммировав эти выражения по всему телу, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^N l_{zi}.$$

Однако твердое тело — непрерывная совокупность материальных точек, т.е. при разбиении тела на отдельные фрагменты (элементарные массы) число таких фрагментов $N \rightarrow \infty$. Поэтому суммирование выражается в интегрировании элементарных моментов импульса dL_z :

$$L_z = \int_{\text{по массе тела}} dL_z = \left(\int_{(M)} r_{\perp}^2 dm \right) \omega_z = I_z \omega_z,$$

где r_{\perp} — расстояние от элемента массы dm до оси вращения. Откуда следует, что **момент инерции твердого тела** — это сумма моментов инерции отдельных материальных точек, его составляющих, вычисляемая по формуле

$$I_z = \int_{(M)} r_{\perp}^2 dm. \quad (4.17)$$

Таким образом, момент инерции обладает свойством аддитивности: момент инерции системы точек равен сумме моментов инерции каждой точки в отдельности. Кроме того, из (4.17) видно, что значение момента инерции для системы точек (и твердого тела в том числе) зависит от выбора оси вращения системы, т.е. от ее места расположения и ориентации в пространстве.

Для примера определим моменты инерции однородного длинного тонкого цилиндра при его вращении относительно разных осей. Рассмотрим три взаимно перпендикулярные оси вращения, проходящие

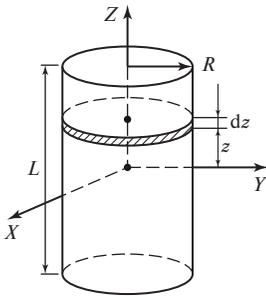


Рис. 4.6

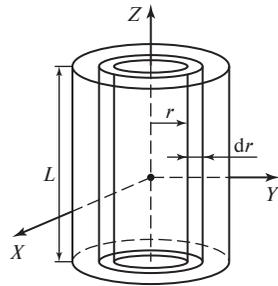


Рис. 4.7

через центр масс цилиндра массой M радиусом R и высотой L (рис. 4.6), причем $L \gg R$.

При повороте цилиндра вокруг осей X и Y моменты инерции получатся одинаковыми, поскольку такие вращательные движения ничем не отличаются одни от другого. Для того чтобы воспользоваться формулой (4.17), разобьем цилиндр на точечные элементарные массы dm — одинаковые тонкие диски, параллельные основаниям цилиндра. Толщина дисков составит dz , а удаление диска от оси вращения z . Обозначив плотность цилиндра через ρ , определим массу такого тонкого диска: $dm = \rho\pi R^2 dz$. При подобном разбиении $r_{\perp} = z$. Тогда

$$\begin{aligned}
 I_x = I_y &= \int z^2 dm = \int_{(-L)/2}^{L/2} z^2 \rho\pi R^2 dz = \\
 &= \rho\pi R^2 \int_{-L/2}^{L/2} z^2 dz = \frac{1}{12} \rho\pi R^2 L^3.
 \end{aligned}$$

Поскольку масса цилиндра $M = \rho\pi R^2 L$, то $I_x = I_y = \frac{1}{12} ML^2$.

Как видно, радиус цилиндра при его вращении вокруг этих осей не влияет на момент инерции, поэтому данная формула справедлива и для определения момента инерции тонкого стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню.

Для определения момента инерции цилиндра относительно оси Z разобьем исходный цилиндр на тонкие цилиндрические слои радиу-

сом r и толщиной dr (рис. 4.7). Масса такого слоя $dm = \rho L 2\pi r dr$. При подобном разбиении $r_{\perp} = r$. Следовательно,

$$I_z = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho L 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi \rho L R^4 = \frac{1}{2} MR^2.$$

Как следует из полученной формулы, длина цилиндра при его вращении вокруг продольной оси не влияет на момент инерции, поэтому данная формула справедлива и для определения момента инерции диска произвольной толщины при его вращении вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно основанию диска.

В последнем выводе мы использовали разбиение цилиндра на тонкие элементарные цилиндрические слои, причем момент инерции такого слоя определялся как $dI = r^2 dm$. Поэтому можно сказать, что момент инерции тонкой цилиндрической трубы относительно ее продольной оси составляет

$$I_z = MR^2.$$

Очевидно, что этим выражением можно пользоваться и для определения момента инерции тонкого кольца при его вращении вокруг своей оси.

Приведем без вывода формулу определения момента инерции шара радиусом R и массой M относительно оси, совпадающей с его любым диаметром:

$$I_z = \frac{2}{5} MR^2.$$

Пример 4.1. Рассмотрим задачу о вращении тела. Пусть на массивный блок, выполненный в виде диска радиусом R и массой M и закрепленный на оси, намотана нерастяжимая невесомая нить, к концу которой привязан груз массой m (рис. 4.8). Как определить ускорение груза при его движении вниз?

Расставим силы, действующие на тела этой системы. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . На блок действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции \vec{N} и сила натяжения нити \vec{T} . Уравнение второго закона Ньютона для поступательного движения груза записывается в виде: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$. Блок не совершает поступательного движения, а вращается вокруг оси.

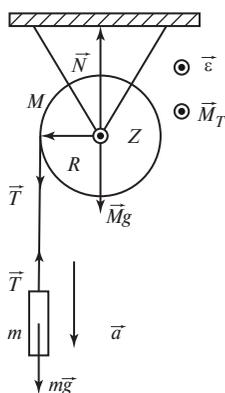


Рис. 4.8

Укажем на рис. 4.8, что направление оси Z — это направление вдоль оси диска «на нас». Тогда из всех сил, действующих на блок момент относительно этой оси создает только сила \vec{T} : $M_T = TR$. Поскольку другие силы проходят через ось вращения, то их плечи равны нулю. Заметим также, что вектор момента силы натяжения направлен «на нас» (предлагаем доказать это вам самостоятельно, используя определение векторного произведения). Кроме того, при ускоренном вращении блока в направлении против часовой стрелки, вектор его углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ также направлен «на нас» (см. рис. 1.12). Таким образом проекции векторов \vec{M}_T и $\vec{\varepsilon}$ на направление выбранной оси Z положительны.

Основное уравнение динамики вращения для блока запишется следующим образом: $M_{Tz} = I_z \varepsilon_z$. Чтобы учесть связь линейного ускорения движения груза и углового ускорения блока, воспользуемся соотношением (1.15): $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$. В результате таких рассуждений получаем систему уравнений в векторном виде:

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T};$$

$$M_{Tz} = I_z \varepsilon_z;$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r},$$

и скалярном виде

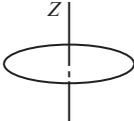
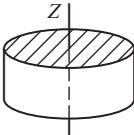
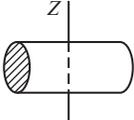
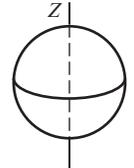
$$ma = mg - T;$$

$$TR = \frac{1}{2} MR^2 \varepsilon;$$

$$a = \varepsilon R.$$

Из второго уравнения последней системы получаем $T = \frac{1}{2} MR\varepsilon$, а с учетом третьего уравнения системы $T = \frac{1}{2} Ma$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы, находим $ma = mg - \frac{1}{2} Ma$. Из этого уравнения находим ускорение груза: $a = \frac{2m}{2m + M} g$.

Запишем в виде таблицы выражения, полученные для расчета моментов инерции различных тел, обладающих осью симметрии:

Тело	Расположение оси вращения Z	Параметры тела	Момент инерции
Кольцо		Масса M , радиус R	$I_z = MR^2$
Диск, цилиндр		Масса M , радиус R	$I_z = \frac{1}{2} MR^2$
Стержень		Масса M , длина L	$I_z = \frac{1}{12} ML^2$
Шар		Масса M , радиус R	$I_z = \frac{2}{5} MR^2$

4.5. Теорема Гюйгенса—Штейнера

В § 4.4 было дано определение момента инерции твердого тела относительно произвольной оси. Поскольку расположение оси вращения относительно тела может быть в общем случае произвольным, то моментов инерции у твердого тела может быть бесконечно много (в то время как масса — только одна). Мы также определили моменты инерции различных симметричных тел относительно осей вращения, проходящих через центр масс таких тел. Нельзя ли воспользоваться полученными результатами и связать момент инерции тела относительно произвольной оси с моментом инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс? Ответ на этот вопрос дает теорема Гюйгенса — Штейнера.

Рассмотрим твердое тело, способное вращаться вокруг оси Z , проходящей через точку C — центр масс тела (рис. 4.9). Допустим, что известен I_{zC} — момент инерции тела относительно этой оси. Если мы

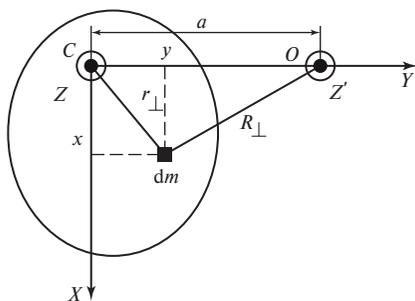


Рис. 4.9

хотим определить $I_{z'}$, — момент инерции тела при его вращении вокруг оси Z' , проходящей через точку O параллельно оси Z на расстоянии a от нее, то в целях его определения разобьем тело на элементарные точечные массы dm . Положение такой элементарной массы в изображенной на рис. 4.9 системе координат задается координатами x и y . Тогда, в соответствии с (4.17),

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \int_M R_{\perp}^2 dm = \int_M [x^2 + (a - y)^2] dm = \\ &= \int_M [x^2 + y^2] dm + \int_M a^2 dm - 2 \int_M ay dm. \end{aligned}$$

Рассмотрим последнее слагаемое полученного выражения. Вспомнив определение центра масс системы материальных точек (2.12), нетрудно увидеть, что y_C — координата центра масс — определяется следующим образом: $y_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i$. Однако для твердого

тела при разбиении его на материальные точки $N \rightarrow \infty$. Поэтому

$$y_C = \frac{1}{M} \int_M y dm, \text{ а следовательно, } \int_M y dm = My_C. \text{ Тогда}$$

$$I_{z'} = \int_M r_{\perp}^2 dm + a^2 \int_M dm - 2a \int_M y dm = I_{zC} + a^2 M - 2a My_C.$$

Поскольку в выбранной системе координат (рис. 4.9) $y_C = 0$, то

$$I_{z'} = I_{zC} + Ma^2. \quad (4.18)$$

Таким образом доказана **теорема Гюйгенса — Штейнера**: *момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, параллельной данной и*

проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями. Знание моментов инерции тела относительно осей, проходящих через центр масс тела, позволяет найти момент инерции тела и описать вращение тела относительно любой произвольной оси.

4.6. Теорема Кёнига

Определим, как изменяется кинетическая энергия тела при переходе из одной системы координат в другую. Поскольку ранее уже были показаны особые свойства центра масс, то свяжем одну из систем отсчета с центром масс C (рис. 4.10) и рассмотрим кинетическую энергию материальной точки массой dm в системе отсчета (X, Y, Z) .

Скорость точки в этой системе отсчета определена как $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, где \vec{r} — радиус-вектор точки. Положение центра масс в этой системе определяется радиусом-вектором \vec{r}_C , а положение точки относительно центра масс — радиусом-вектором \vec{r}_1 . Поскольку $\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r}_1$, то $\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}_1$, где \vec{v}_C — скорость центра масс в системе (X, Y, Z) , а \vec{v}_1 — скорость материальной точки относительно центра масс. Тогда кинетическая энергия точки в системе (X, Y, Z) вычислится следующим образом:

$$dW_k = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} (\vec{v}_C + \vec{v}_1)^2 dm.$$

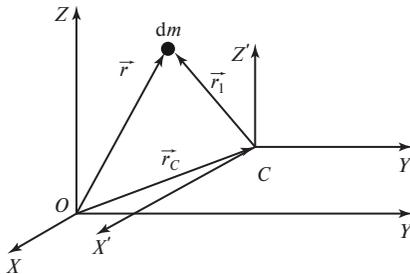


Рис. 4.10

Определим кинетическую энергию тела массой M , состоящего из совокупности материальных точек:

$$W_{\text{к}} = \int_M \frac{1}{2} (\vec{v}_C + \vec{v}_1)^2 dm = \int_M \frac{1}{2} (\vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_C \vec{v}_1 + \vec{v}_C^2) dm.$$

Вспомним, что, согласно § 2.5, в произвольной системе координат скорость центра масс равна

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M} \int_M \vec{v} dm.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_{\text{к}} &= \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_1^2 dm + \frac{1}{2} \int_M 2\vec{v}_C \vec{v}_1 dm + \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_C^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_1^2 dm + \vec{v}_C \int_M \vec{v}_1 dm + \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_C^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_M v_1^2 dm + \vec{v}_C M \vec{v}_{C1} + \frac{1}{2} \int_M v_C^2 dm, \end{aligned}$$

где \vec{v}_{C1} — скорость центра масс относительно центра масс, очевидно равная нулю. Поэтому

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} \int_M v_1^2 dm + \frac{1}{2} \int_M v_C^2 dm = W_{\text{к отн}} + W_{\text{к ц.м.}} \quad (4.19)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек есть сумма кинетической энергии ее движения относительно центра масс и кинетической энергии, которой обладала бы она, двигаясь поступательно со скоростью центра масс. Это утверждение получило название **теоремы Ф. Кёнига** (1774 — 1833).

4.7. Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим вращение тела вокруг оси, проходящей через центр масс, и определим кинетическую энергию тела. Воспользуемся доказанной теоремой Кёнига. Поскольку центр масс при таком движении тела не совершает поступательного движения, то $W_{\text{к ц.м.}} = 0$. Поэтому $W_{\text{к}} = W_{\text{к отн}}$ — кинетическая энергия вращения относительно центра масс. Вычислим ее согласно (4.19):

$$W_{\text{к отн}} = \frac{1}{2} \int_M v_1^2 dm = \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_1^2 dm = \frac{1}{2} \int_M (\vec{v}_1, \vec{v}_1) dm,$$

где \vec{v}_1 — линейная скорость материальной точки dm при ее вращении вокруг центра масс. Если вращение совершается по окружности радиуса r с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то согласно (1.13) $\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Тогда

$$W_{\text{к отн}} = \frac{1}{2} \int_M (\vec{v}_1, [\vec{\omega}, \vec{r}]) dm.$$

Используя свойство смешанного произведения векторов, получаем

$$\begin{aligned} V_{\text{к отн}} &= \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{v}_1]) dm = \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega}, [\vec{r}, dm \vec{v}_1]) = \\ &= \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega}, d\vec{L}). \end{aligned}$$

Поскольку при вращении тела угловые скорости всех его материальных точек одинаковы, то

$$W_{\text{к отн}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \int_M d\vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} = \frac{1}{2} \omega_z L_z.$$

Так как $L_z = I_z \omega_z$, то

$$W_{\text{к отн}} = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (4.20)$$

Таким образом, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс, равна половине произведения момента инерции тела относительно этой оси на квадрат угловой скорости вращения вокруг этой оси.

Попробуем получить этот результат иначе, исходя из теоремы об изменении кинетической энергии. Разобьем тело на элементарные массы, каждая из которых при вращении имеет скорость \vec{v}_i и совершает за время dt перемещение $d\vec{l}_i$. Тогда элементарная работа равнодействующей силы по перемещению i -й точки будет $dA = (\vec{R}, d\vec{l}_i) = (\vec{R}, \vec{v}_i dt)$. Поскольку равнодействующая всех сил определяется векторной суммой внешних и всех внутренних сил, действующих на i -ю точку, то

$$dA_i = \left(\left(\vec{F}_i + \sum_k \vec{f}_{ik} \right), \vec{v}_i dt \right) = (\vec{F}_i, \vec{v}_i dt) + \left(\sum_k \vec{f}_{ik}, \vec{v}_i dt \right).$$

Поскольку $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, то

$$dA_i = (\vec{F}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i] dt) + \left(\sum_k \vec{f}_{ik}, [\vec{\omega}, \vec{r}_i] dt \right), \text{ или}$$

$$dA_i = (\vec{\omega}, [\vec{r}_i, \vec{F}_i] dt) + \left(\vec{\omega}, \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{f}_{ik} \right] dt \right), \quad (4.21)$$

что следует из свойства смешанного произведения векторов.

Просуммируем последнее выражение по всем точкам тела. Вычислим сумму всех первых слагаемых (4.21):

$$\sum_i (\vec{\omega}, [\vec{r}_i, \vec{F}_i] dt) = \vec{\omega} \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] dt = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внеш}} dt.$$

Сумму всех вторых слагаемых (4.21) можно вычислить так:

$$\sum_i \left(\vec{\omega}, \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{f}_{ik} \right] dt \right) = \vec{\omega} \sum_i \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{f}_{ik} \right] dt = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внут}} dt = 0,$$

поскольку суммарный момент внутренних сил системы материальных точек равен нулю (см. § 4.2). Тогда

$$dA_i = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внеш}} dt = \vec{M}_{\text{внеш}} \vec{\omega} dt = \vec{M}_{\text{внеш}} d\vec{\varphi},$$

где $d\vec{\varphi}$ — угловое перемещение тела за время dt .

Работа по вращению тела вокруг оси Z :

$$dA = M_{\text{внеш}} d\varphi = I_z \varepsilon_z \omega dt = I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_z \omega d\omega.$$

Проинтегрировав полученное выражение, найдем полную работу

$$A = \int_1^2 dA = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I_z \omega d\omega = I_z \left(\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\omega_1^2}{2} \right).$$

По теореме об изменении кинетической энергии (3.6) $A = \Delta W_{\text{к}} = W_{\text{к}2} - W_{\text{к}1}$, поэтому

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (4.22)$$

4.8. Плоское движение твердого тела (качение)

Рассмотрим кинематику и динамику частного случая плоского движения, а именно качения. *Плоским* называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в параллельных плоскостях. Примером плоского движения является качение симметричного тела (цилиндра, шара, диска) по плоскости (рис. 4.11). Пусть качение происходит без проскальзывания. В этом случае скорость точек катящегося тела, соприкасающихся с плоскостью, равна нулю ($\vec{v}_A = 0$). Как уже говорилось (см. § 1.6), любое движение твердого тела можно представить как совокупность двух движений: поступательного и вращательного. Например, качение цилиндра (рис. 4.12, а) можно представить как сумму поступательного движения его со скоростью, равной скорости центра масс C (рис. 4.12, б), и одновременного вращения относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр масс (рис. 4.12, в).

Скорость любой точки катящегося цилиндра можно представить в виде $\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_в$. Здесь \vec{v}_n — скорость поступательного движения, которая одинакова для любой точки и равна скорости центра масс \vec{v}_C , а $\vec{v}_в$ — скорость вращательного движения относительно оси Z , направленной на рис. 4.12, в «от нас» и проходящей через точку C . Так как $\vec{v}_A = 0$, а векторы $\vec{v}_в$ и \vec{v}_n в точке A противоположны, то модули этих векторов одинаковы: $v_n = v_в$. В точке D векторы $\vec{v}_в$ и \vec{v}_n сонаправлены, поэтому $\vec{v}_D = 2\vec{v}_C$.

Найдем кинетическую энергию катящегося цилиндра. Для этого разобьем цилиндр на множество элементарных масс и найдем кинетическую энергию каждой из них.

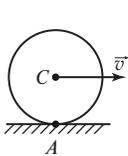


Рис. 4.11

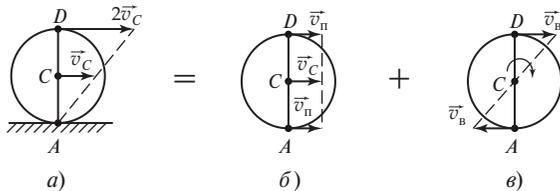


Рис. 4.12

тическую энергию каждой элементарной массы. Поскольку скорость любой i -й элементарной массы $\vec{v}_i = \vec{v}_{\text{п}i} + \vec{v}_{\text{в}i}$, то

$$W_{\text{к}i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{\text{п}i} + \vec{v}_{\text{в}i})^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{\text{п}i}^2 + 2\vec{v}_{\text{п}i}\vec{v}_{\text{в}i} + \vec{v}_{\text{в}i}^2).$$

Для определения кинетической энергии катящегося цилиндра необходимо сложить кинетические энергии всех элементарных масс, поэтому

$$W_{\text{к}} = \sum_i W_{\text{к}i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{\text{п}i}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{\text{в}i}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_{\text{п}i} \vec{v}_{\text{в}i}. \quad (4.23)$$

Поскольку скорость поступательного движения всех точек одинакова и равна скорости центра масс, то

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{\text{п}i}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_C^2 = \vec{v}_C^2 \sum_i \frac{1}{2} m_i = \frac{1}{2} m \vec{v}_C^2.$$

Согласно (4.22), второе слагаемое (4.23) вычислим так:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{\text{в}i}^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

где I_z — момент инерции цилиндра относительно оси вращения Z .

Наконец, третье слагаемое (4.23) преобразуется к виду

$$\sum_i m_i \vec{v}_{\text{п}i} \vec{v}_{\text{в}i} = \sum_i m_i v_{\text{п}i} v_{\text{в}i} \cos \alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{v}_{\text{п}}$ и $\vec{v}_{\text{в}}$.

Для любой элементарной массы m_i всегда найдется симметрично расположенная масса m_k такая, что $\cos \beta = -\cos \alpha$ (рис. 4.13). Следовательно, при суммировании третье слагаемое (4.23) обращается в нуль. Таким образом,

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} m \vec{v}_C^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (4.24)$$

т.е. кинетическая энергия катящегося тела складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и кинетической энергии вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс. Можно показать, что данное утверждение справедливо не только для качения, но и для любого плоского движения.

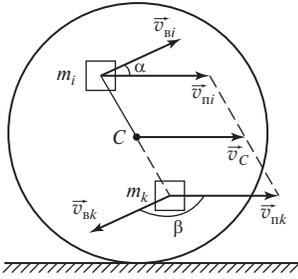


Рис. 4.13

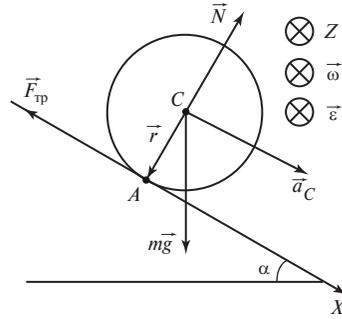


Рис. 4.14

Любое плоское движение твердого тела описывается двумя векторными уравнениями (2.2) и (4.11), которые объединим в систему

$$\left. \begin{aligned} m \vec{a}_C &= \sum_i \vec{F}_i; \\ d\vec{L} / dt &= \sum_i \vec{M}_{F_i}. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Система векторных уравнений (4.25) в проекциях на оси трехмерной системы координат эквивалентна шести скалярным уравнениям, поэтому говорят, что твердое тело имеет шесть степеней свободы (см. § 1.1).

Рассмотрим скатывание цилиндра массой M и радиусом r без проскальзывания с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 4.14). На такой цилиндр действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции опоры \vec{N} , трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Под действием этих сил центр масс цилиндра движется вниз по наклонной плоскости с ускорением \vec{a}_C , а сам цилиндр вращается вокруг оси Z , проходящей через центр масс с угловым ускорением $\vec{\epsilon}$. Направления векторов \vec{a}_C , $\vec{\epsilon}$ и оси Z указаны на рис. 4.14. Вращение цилиндра обеспечивается действием момента силы $\vec{F}_{тр}$ относительно оси Z , так как моменты сил $m\vec{g}$ и \vec{N} относительно этой оси равны нулю

(силы проходят через центр масс). Уравнения системы (4.25) выглядят так:

$$m \vec{a}_C = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}};$$

$$d\vec{L}_C/dt = \sum_i \vec{M}_{F_{\text{тр}} C}.$$

Эти уравнения записываются в проекциях на оси X и Z следующим образом:

$$ma_C = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}};$$

$$I_z \varepsilon_z = F_{\text{тр}} r.$$

Воспользовавшись связью линейного и углового ускорений (1.15), имеем: $a_C = \varepsilon r$. Момент инерции цилиндра относительно оси Z

$I_z = \frac{1}{2} mr^2$. Совместно решая составленные уравнения, определяем ускорение центра масс цилиндра при его скатывании:

$$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Глава 5

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Пример 5.1. Стальной шарик отпускают на высоте $h = 3$ м от массивной стальной плиты, движущейся вверх со скоростью $v = 2$ м/с. Определите время τ между двумя последовательными абсолютно упругими ударами шарика о плиту.

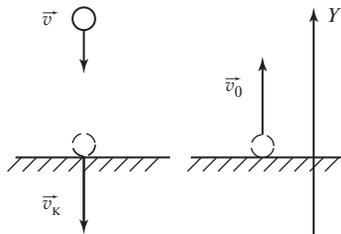


Рис. 5.1

Эту задачу удобно решать в системе отсчета, связанной с движущейся плитой. В такой системе отсчета формулировка задачи будет иметь вид: «С высоты h со скоростью v , направленной вниз, на неподвижную плиту бросают шарик». Найдем скорость v_k , с которой шарик подлетит к плите (рис. 5.1), по формуле $v_k^2 - v^2 = 2gh$,

откуда $v_k = \sqrt{v^2 + 2gh}$. Скорость v_0 , с которой шарик отскочит от плиты, равна по модулю v_k , так как удар абсолютно упругий.

В момент $\tau/2$ после отскока скорость шарика обратится в 0 (время подъема равно времени спуска). Запишем это условие в проекции на ось Y' : $v'_y = v_0 - g \frac{\tau}{2}$. Следовательно, искомое время:

$$\tau = \frac{2}{g} v_0 = 2 \sqrt{\left(\frac{v}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}.$$

Пример 5.2. Два одинаковых груза с помощью идеальных нитей удерживаются в положении, показанном на рис. 5.2. Найдите ускорения грузов сразу после пережигания горизонтальной нити. Угол α известен.

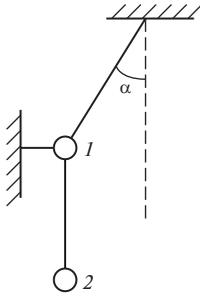


Рис. 5.2

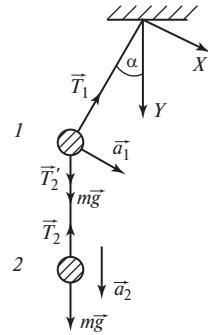


Рис. 5.3

Покажем систему сразу после пережигания нити на рис. 5.3. Начальные скорости тел равны 0, поэтому нормальное ускорение груза 1 равно 0. Следовательно, ускорение этого груза направлено по касательной к траектории его дальнейшего движения, т.е. перпендикулярно силе \vec{T}_1 . На груз 2 действуют вертикально направленные силы, поэтому его ускорение направлено вертикально вниз. Таким образом, выберем оси X и Y вдоль направлений ускорений \vec{a}_1 и \vec{a}_2 .

Векторные уравнения второго закона Ньютона для каждого груза:

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2' \quad \text{и} \quad m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{T}_2.$$

Проекции этих уравнений на выбранные оси имеют вид: $ma_1 = (mg + T_2') \sin \alpha$, $ma_2 = mg - T_2$. Если считать нить невесомой, то $T_2' = T_2$. Кроме того, если нити нерастяжимы, то проекции ускорений крайних точек нити на ось Y равны: $a_1 \sin \alpha = a_2$.

Совместное решение всех составленных уравнений дает

$$a_1 = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} g, \quad a_2 = \frac{2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} g.$$

Пример 5.3. Два одинаковых маленьких шарика связаны идеальной нитью и удерживаются в положении, показанном на рис. 5.4. Шарик отпускают. Какое событие произойдет раньше: первый шарик соскользнет с гладкой горизонтальной поверхности или второй шарик ударится о вертикальную стенку?

На рис. 5.5 изобразим промежуточное состояние системы, на которую действуют внешние силы: $m\vec{g}$ со стороны Земли, \vec{N} и \vec{R}

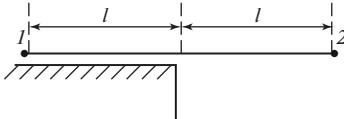


Рис. 5.4

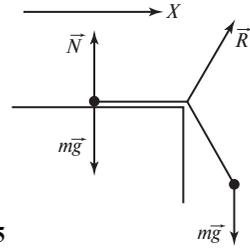


Рис. 5.5

со стороны стола. Если бы правый шарик ударился о вертикальную стенку, пока левый лежит на столе, это бы означало, что центр тяжести системы шариков сместился бы влево. Однако это невозможно, так как суммарная проекция внешних сил системы на ось X положительна.

Следовательно, сначала первый шарик соскользнет с горизонтальной поверхности.

Пример 5.4. Идеальный стержень, способный вращаться вокруг горизонтальной оси Z , удерживают в положении под углом α к горизонту (рис. 5.6). Определите угловое ускорение стержня и силу реакции оси в первоначальный момент после отпущения стержня. Трение в оси отсутствует.

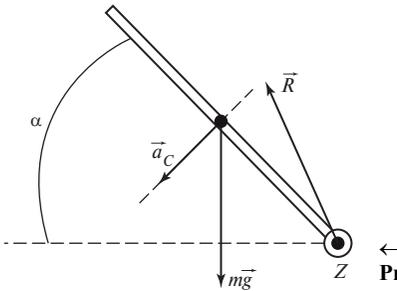


Рис. 5.6

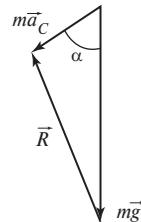


Рис. 5.7

Момент инерции такого стержня равен $I = \frac{1}{3} ml^2$. Основное уравнение динамики вращательного движения $I\vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_i$ запишем в проекции на ось Z : $\frac{1}{3} ml^2 \varepsilon_z = mg \frac{l}{2} \cos \alpha$. Откуда угловое ускорение стержня равно $\varepsilon_z = \frac{3}{2} \frac{g \cos \alpha}{l}$. Ускорение центра масс стержня $a_C = \varepsilon \frac{l}{2} = \frac{3}{4} g \cos \alpha$.

Второй закон Ньютона $m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{R}$ означает, что можно построить треугольник сил (рис. 5.7), в котором сторону $|\vec{R}|$ можно найти по теореме косинусов:

$$R = \sqrt{(mg)^2 + (ma_C)^2 - 2mgma_C \cos \alpha},$$

откуда

$$R = mg \sqrt{1 - \frac{15}{16} \cos^2 \alpha}.$$

Пример 5.5. Брусок массой m и длиной l лежит у границы двух горизонтальных поверхностей так, как показано на рис. 5.8. Коэффициенты трения бруска о поверхности различны и равны μ_1 и μ_2 соответственно. Какую работу надо совершить, чтобы медленно переместить брусок вправо с одной поверхности на другую?

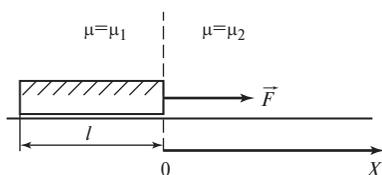


Рис. 5.8

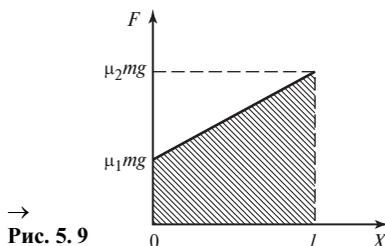


Рис. 5.9

Медленное перемещение бруска возможно лишь при условии $F = F_{\text{тр}}$. Построим зависимость этой силы от координаты x правого края бруска. Она изменяется по линейному закону от $F_1 = \mu_1 mg$ до $F_2 = \mu_2 mg$. Построим график этой зависимости (рис. 5.9). Площадь заштрихованной фигуры дает искомую работу

$$A = \frac{1}{2} (\mu_1 mg + \mu_2 mg) l = \frac{mgl}{2} (\mu_1 + \mu_2).$$

Пример 5.6. Брусок массой M покоится на идеально гладком столе. Частица массой m налетает на брусок со скоростью v , образуя угол α с поверхностью бруска. С какой скоростью u частица отскочит от бруска после абсолютно упругого удара? Поверхность бруска идеально гладкая.

На виде сверху (рис. 5.10) показаны положения системы тел до и после удара. По условию задачи эта система тел замкнута и консервативна. Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси X и

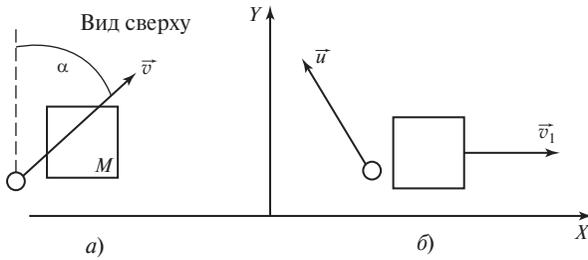


Рис. 5.10

Y и закон сохранения энергии: $p_{1x} = p_{2x}$, $p_{1y} = p_{2y}$, $W_1 = W_2$. Эти соотношения имеют вид:

$$mv \sin \alpha = mu_x + Mv_1, \quad mv \cos \alpha = mu_y,$$

$$mv^2/2 = mu^2/2 + Mv_1^2/2.$$

Из этих уравнений получаем ответ:

$$u = \sqrt{\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 v^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Пример 5.7. Стержни одинаковой длины l , но разных масс m_1 и m_2 , способные без трения вращаться относительно общей горизонтальной оси Z , приводят в горизонтальное положение и отпускают (рис. 5.11). При ударе стержни слипаются. Найдите максимальный угол отклонения слипшихся стержней от вертикали после удара, если $m_2 < m_1$.

В процессе неупругого удара механическая энергия стержней не сохраняется. Из-за действия внешней силы реакции оси \vec{N} во время удара не сохраняется импульс этой системы. Поскольку моменты

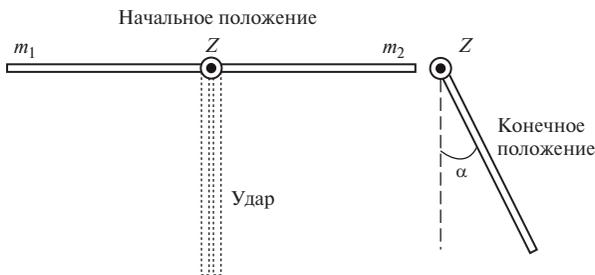


Рис. 5.11

сил \vec{N} и $m\vec{g}$ во время удара равны нулю, то приходим к выводу: во время удара сохраняется проекция момента импульса системы L_z на ось вращения.

Угловую скорость ω_0 каждого стержня до удара найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = mg|\Delta h_C|, \text{ или } \frac{ml^2\omega_0^2}{6} = mg\frac{l}{2}, \text{ т.е. } \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Угловую скорость совместного движения стержней сразу после удара найдем по закону сохранения проекции момента импульса: $L_{z1} = L_{z2}$, т.е.

$$\frac{m_1 l^2}{3} \omega_0 - \frac{m_2 l^2}{3} \omega_0 = \frac{(m_1 + m_2) l^2}{3} \omega,$$

откуда $\omega = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \omega_0$.

После удара механическая энергия перестает изменяться, тогда закон ее сохранения можно записать в виде:

$$\frac{(I_1 + I_2)}{2} \omega^2 = (m_1 + m_2)g\frac{l}{2}(1 - \cos\alpha).$$

Совместное решение уравнений дает ответ для максимального угла отклонения

$$\alpha = \arccos \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right].$$

Глава 6

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебаниями называются процессы (движения или изменения состояния), в той или иной степени повторяющиеся во времени. В зависимости от природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают: *механические колебания* (колебания маятников, струн, частей машин, мостов и других сооружений, давления воздуха при распространении в нем звука и т.п.); *электромагнитные колебания* (колебания переменного электрического тока в цепи, колебания векторов напряженности электрического и магнитного полей); *электромеханические колебания* (колебания мембраны телефона) и пр. Система, совершающая колебания, называется *колебательной системой*.

6.1. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение колебаний

Свободными (собственными) колебаниями называются колебания, происходящие в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему и возникающие вследствие начального отклонения системы от положения устойчивого равновесия.

Вынужденными колебаниями называются колебания, возникающие в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия.

Периодическими колебаниями называются колебания, если значения всех физических величин, характеризующих колебательную систему и изменяющихся при ее колебаниях, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T , удовлетворяющий этому условию, называется *периодом колебаний*.

Частотой периодических колебаний называется величина $\nu = 1/T$, равная числу колебаний, совершающихся за единицу времени. Циклической (круговой) частотой колебаний называется величина $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, равная числу полных колебаний, совершающихся за 2π единиц времени.

Пусть отклонение колебательной системы от положения равновесия характеризует величина s . Периодические колебания величины $s(t)$ называются *гармоническими колебаниями*, если

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.1)$$

где A — **амплитуда** колебаний (максимальное значение колеблющейся величины $A = s_{\max} > 0$).

Значение s в произвольный момент времени определяется значением **фазы** колебаний $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$; φ_0 — начальная фаза, т.е. значение $\varphi(t)$ в момент времени $t = 0$.

Из (6.1) видно, что первая и вторая производные $s(t)$ по времени также совершают гармонические колебания той же частоты:

$$\left. \begin{aligned} ds/dt &= A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2); \\ d^2s/dt^2 &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi), \end{aligned} \right\} (6.2)$$

причем амплитуды ds/dt и d^2s/dt^2 соответственно равны $A\omega$ и $A\omega^2$. Видно, что ds/dt опережает s по времени на $T/4$, а по фазе на $\pi/2$; d^2s/dt^2 опережает $s(t)$ по времени на $T/2$, а по фазе на π . Графики $s(t)$ и ds/dt при $\varphi_0 = 0$ приведены на рис. 6.1. Из (6.2) следует, что гармонически колеблющаяся величина s удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2s = 0, \quad (6.3)$$

которое называется **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**.

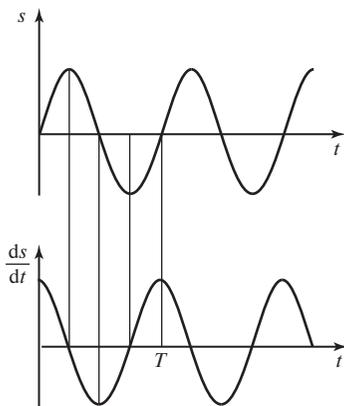


Рис. 6.1

6.2. Векторные диаграммы

Гармонические колебания параметра $s(t)$, которые описываются уравнением $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, можно изобразить графически с помощью вращающегося на плоскости вектора (рис. 6.2). Для этого из начала координат на плоскости проводят вектор \vec{A} , модуль которого равен амплитуде колебаний. Вектор \vec{A} составляет с осью OX угол $\varphi = \omega t + \varphi_0$, равный фазе колебаний в данный момент времени t . С течением времени угол увеличивается так, что вектор вращается вокруг центра координат с угловой скоростью, равной циклической частоте гармонических колебаний. Проекция вектора на ось OX совершает гармонические колебания по закону $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Графическое изображение гармонических колебаний с помощью вращающегося вектора амплитуды называется **методом векторных диаграмм**. Им широко пользуются, например, при сложении одинаково направленных гармонических колебаний.

Рассмотрим сложение двух колебаний, одно из которых совершается по закону $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})$, а другое по закону $s_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$. В результате сложения этих колебаний получается тоже гармоническое колебание вида $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Это нетрудно доказать с помощью метода векторных диаграмм (рис. 6.3). Если каждому из данных колебаний поставить в соответствие вращающийся вектор, то результирующее колебание определится вращением суммы векторов. Из рис. 6.3 видно, что амплитуда результирующего колебания находится по теореме косинусов следующим образом:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \quad (6.4)$$

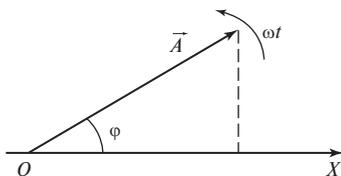


Рис. 6.2

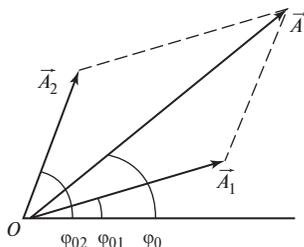


Рис. 6.3

Начальную фазу результирующего колебания можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}.$$

Сумма двух векторов, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями, будет вращаться с той же угловой скоростью. Таким образом, мы доказали, что в результате сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих в одном направлении, получается гармоническое колебание той же частоты, причем его амплитуда удовлетворяет условию $A_1 - A_2 \leq A \leq A_1 + A_2$.

6.3. Динамика гармонических колебаний

Получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний из уравнений, описывающих колебательный процесс. Рассмотрим колебания пружинного маятника — груза массой m , подвешенного на идеальной невесомой пружине жесткостью k (рис. 6.4). На такой груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости растянутой пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. В положении равновесия модули этих сил одинаковы: $mg = F_{\text{упр}}$. Если обозначить через Δl статическое растяжение пружины от недеформированного состояния, то, согласно закону Гука, в положении равновесия $F_{\text{упр}} = k\Delta l = mg$. При выведении груза из положения равновесия модуль силы упругости изменяется с учетом деформации пружины. Растянем пружину вниз на длину x , тогда $F_{\text{упр}} = k(\Delta l + x)$. Если пренебречь действием сопротивления воздуха, то при отпуске груза он начнет совершать гармонические колебания. Докажем это. Уравнение второго закона Ньютона для груза можно записать следующим образом:

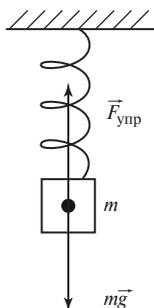


Рис. 6.4

$$\begin{aligned} ma &= mg - F_{\text{упр}} = mg - k(\Delta l + x) = \\ &= mg - k\Delta l - kx = -kx. \end{aligned}$$

Поскольку $a = d^2x/dt^2$, то из этого уравнения получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (6.5)$$

Если рассматривать смещение груза от положения равновесия в качестве параметра колебаний, то уравнение (6.5) совпадает с дифференциальным уравне-

нием (6.3), т.е. является уравнением собственных колебаний пружинного маятника. Частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} . \quad (6.6)$$

При отсутствии трения пружинный маятник колеблется по гармоническому закону с периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Рассмотрим **физический маятник** — твердое тело, которое совершает колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр тяжести тела и называемой осью качания маятника (рис. 6.5). Центр тяжести маятника совпадает с его центром масс C . Точка O пересечения оси качания маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через центр тяжести маятника, называется **точкой подвеса маятника**. Если пренебречь силами трения в подвесе маятника и силой трения о воздух, то момент относительно оси качания создает только сила тяжести $m\vec{g}$. При отклонении маятника на угол α от положения равновесия момент силы численно равен $mg l \sin \alpha$, где l — расстояние между центром масс и точкой подвеса. Этот момент возвращает маятник в положение равновесия, поэтому его направление противоположно угловому перемещению. Тогда основное уравнение динамики вращательного движения (4.16) для физического маятника имеет вид:

$$I_z \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - mgl \sin \alpha ,$$

где I_z — момент инерции маятника относительно оси качания.

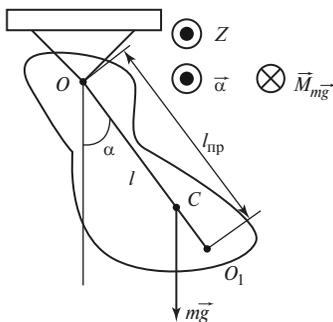


Рис. 6.5

Рассматривая малые колебания тела, при которых $\sin \alpha \approx \alpha$, получаем уравнение

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I_z} \alpha = 0, \quad (6.7)$$

т.е. угол α удовлетворяет дифференциальному уравнению гармонических колебаний (6.3). Следовательно, при отсутствии трения малые колебания физического маятника являются гармоническими, причем в уравнении колебаний в качестве параметра колебаний выступает угол отклонения маятника от положения равновесия.

Частота собственных колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/I_z}, \quad (6.8)$$

период колебаний $T = 2\pi \sqrt{I_z/(mgl)}$.

*«Материальная точка», подвешенная на невесомой нерастяжимой нити, совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, называется **математическим маятником**. Математический маятник — частный случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в его центре масс, так что $I_z = ml^2$, поэтому для математического маятника*

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad T = 2\pi \sqrt{l/g}. \quad (6.9)$$

Если сопоставить (6.8) и (6.9), то видно, что математический маятник с длиной нити подвеса $l_{\text{пр}} = I_z/(ml)$ имеет тот же период колебаний, что и физический маятник массой m , моментом инерции I_z и расстоянием между точкой подвеса и центром масс l . *Длина математического маятника, имеющего тот же период колебаний, что и данный физический маятник, называется **приведенной длиной физического маятника**. Точка O_1 , лежащая на прямой OC на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от точки подвеса маятника (рис. 6.5), называется **центром качаний маятника**. Центр качаний и точка подвеса обладают свойством взаимности: если маятник подвесить так, чтобы его ось качаний проходила через точку O_1 , то точка O будет совпадать с новым центром качаний маятника, т.е. приведенная длина и период колебаний маятника останутся прежними.*

6.4. Механическая энергия гармонических колебаний

Рассмотрим механические колебания пружинного маятника, совершающего свободные гармонические колебания, описываемые уравнением $x(t) = A \cos(\omega t)$. Полная механическая энергия такого маятника в произвольный момент времени является суммой потенциальной энергии упругой деформации пружины $W_{\text{п}}$ и кинетической энергии груза $W_{\text{к}}$.

Выразим *кинетическую энергию* груза на пружине:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t) = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t).$$

Найдем *потенциальную энергию* упругодеформированной пружины:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t).$$

Графики зависимостей потенциальной и кинетической энергии гармонических колебаний от времени показаны на рис. 6.6. Следует отметить, что частота колебаний энергии $\omega^* = 2\omega$, а ее максимальное значение пропорционально квадрату амплитуды смещения материальной точки.

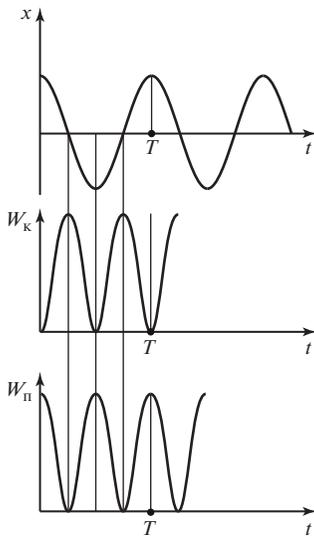


Рис. 6.6

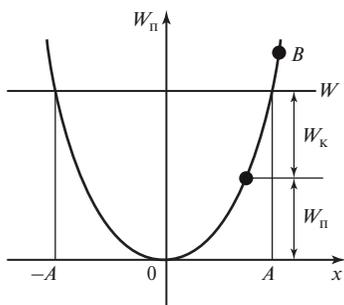


Рис. 6.7

Полная механическая энергия при свободных колебаниях не изменяется:

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = m\omega^2 A^2 / 2 = kA^2 / 2 = \text{const},$$

поскольку в системе отсутствуют диссипативные силы.

Рассмотрим движение шарика в гладком параболическом желобе. На рис. 6.7 показано соотношение между потенциальной и кинетической энергиями в зависимости от положения шарика в «потенциальной яме». Если смещение шарика от положения устойчивого равновесия $x = 0$, то его кинетическая энергия достигает максимума, а потенциальная обращается в нуль. Когда смещение шарика $x = \pm A$ (точки поворота), кинетическая энергия обращается в нуль, потенциальная же энергия достигает максимума. При движении смещение шарика может принимать значения $|x| \leq A$. С позиций закона сохранения энергии шарик не может оказаться за пределами этой области, например в точке B . В этом случае его кинетическая энергия приняла бы значение $W_{\text{к}} = W - W_{\text{п}} < 0$, что невозможно.

6.5. Затухающие колебания

Рассмотрим пружинный маятник, на который действует сила сопротивления, линейно зависящая от скорости $F_{\text{тр}} = -\mu v = -\mu \dot{x}$. Векторное уравнение второго закона Ньютона примет вид:

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Запишем второй закон Ньютона в скалярном виде:

$$m \ddot{x} = mg - k(\Delta l + x) - \mu \dot{x}.$$

Тогда дифференциальное уравнение затухающих колебаний выглядит следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0,$$

где $\mu/m = 2\beta$ (β — коэффициент затухания); $k/m = \omega_0^2$ (ω_0 — собственная частота свободных гармонических колебаний).

Дифференциальное уравнение *свободных затухающих колебаний линейной* системы имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Если затухание невелико ($\beta < \omega_0$), решением этого однородного линейного дифференциального уравнения является функция

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

т.е. затухающие колебания не являются периодическими, однако величина $x(t)$ обращается в нуль, а также достигает максимальных и минимальных значений через равные промежутки времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (6.10)$$

где T — период затухающих колебаний; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ — частота затухающих колебаний.

Величина $x(t) = A_0 e^{-\beta t}$ называется *амплитудой затухающих колебаний*; A_0 — начальная амплитуда. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени тем быстрее, чем больше коэффициент затухания β .

Если сравнить амплитуды колебаний системы в моменты времени t и $t + \tau$, то можно получить, что

$$\frac{A(t)}{A(t + \tau)} = e^{\beta \tau}.$$

Если за промежуток времени τ амплитуда колебаний уменьшается в e раз, то $\beta = 1/\tau$, т.е. коэффициент затухания — величина, обратная промежутку времени τ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз.

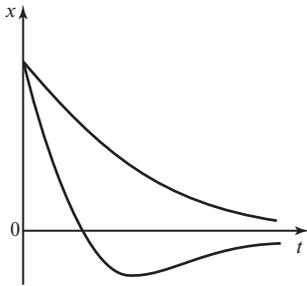


Рис. 6.8

Также для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний вводится понятие **логарифмического декремента** δ :

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Если за время NT система совершит N колебаний и их амплитуда уменьшится в e раз, то $\delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$. Таким обра-

зом, логарифмический декремент — безразмерная величина, обратная числу колебаний N , в течение которых амплитуда уменьшается в e раз.

Из выражения (6.10) следует, что при $\omega_0^2 \leq \beta^2$ колебания в системе не возникают. В этом случае наблюдается *апериодический процесс* (рис. 6.8), в результате которого вся запасенная в системе механическая энергия расходуется на работу против сил сопротивления. Каким из двух способов, показанных на рис. 6.8, система вернется в положение равновесия, зависит от начальных условий.

6.6. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынуждающей силой называется переменная внешняя сила, приложенная к системе и вызывающая ее вынужденные механические колебания. Пусть вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону $F = F_0 \cos(\omega t)$. Тогда дифференциальное **уравнение вынужденных колебаний** запишем следующим образом:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (6.11)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha) + A \cos(\omega t - \varphi_0),$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. В этом выражении первое слагаемое играет роль только на начальной стадии установления процесса колебаний. В дальнейшем этой составляющей решения можно пренебречь. Второе слагаемое описывает установившиеся вынужденные колебания (рис. 6.9).

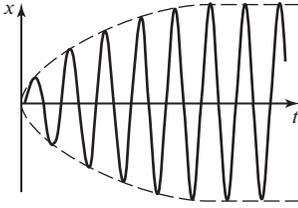


Рис. 6.9

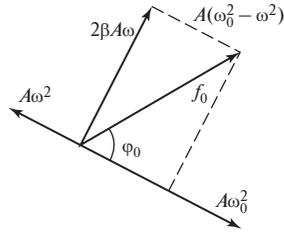


Рис. 6.10

Подставим $x(t) = A \cos(\omega t - \varphi_0)$ в уравнение (6.11). Для этого найдем производные $x(t)$ по времени: $\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t - \varphi_0) = A\omega \cos(\omega t - \varphi_0 + \pi/2)$ и $\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi_0) = A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi_0 + \pi)$. Тогда получим:

$$A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi_0 + \pi) + 2\beta A\omega \cos(\omega t - \varphi_0 + \pi/2) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi_0) = f_0 \cos(\omega t),$$

где $f_0 = F_0/m$. Используя метод векторных диаграмм, представим левую часть последнего уравнения в виде суммы трех векторов (рис. 6.10), модули которых указаны на рисунке. Результат сложения этих трех векторов — вектор, модуль которого равен f_0 . Из рис. 6.10 следует, что (при $\omega_0 > \omega$)

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

По теореме Пифагора найдем амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (6.12)$$

Из (6.12) следует, что при $\omega = 0$ в системе происходит *статическое смещение* из положения равновесия под действием постоянной силы F_0 на величину f_0/ω_0^2 (рис. 6.11).

При неограниченном возрастании частоты внешнего воздействия ($\omega \rightarrow \infty$) амплитуда колебаний стремится к нулю, $\operatorname{tg} \varphi_0 \rightarrow 0$ и $\varphi_0 \rightarrow -\pi$.

Дифференцируя выражение (6.12) по переменной ω и приравнявая полученную производную нулю, определяем такую частоту внешнего воздействия $\omega = \omega_p$, при которой амплитуда колебаний

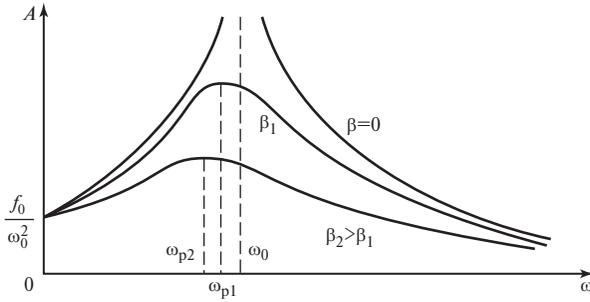


Рис. 6.11

достигает максимума: $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенной частоте внешнего воздействия называется **резонансом**. График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы при различных коэффициентах затухания системы приведен на рис. 6.11. Из формулы (6.12) следует, что

$$A_{\max} = A(\omega_p) = \frac{F_0}{2m\beta\omega_p}.$$

С явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различных сооружений. Собственная частота колебаний этих устройств не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий, иначе может произойти разрушение конструкции. Вместе с тем явление резонанса часто оказывается весьма полезным, особенно в акустике, радиотехнике и т.д.

Глава 7

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Принцип относительности Галилея (см. § 2.1) утверждает эквивалентность всех инерциальных систем отсчета (ИСО) лишь для механических явлений. Поэтому этот принцип не может быть основой всей физической науки, так как выделяет механические явления как особые и, таким образом, не отражает материального единства различных физических явлений. Физическая теория, которая рассматривает пространственно-временные закономерности для любых физических процессов, называется *теорией относительности*. Она была создана А. Эйнштейном и в основном завершена к 1915 г. В основе этой теории лежит фундаментальный физический закон, согласно которому все законы физики (а не только законы механики) имеют одинаковую форму записи во всех ИСО. Теория относительности делится на две части: общую теорию относительности, изучающую неинерциальные системы отсчета и поля тяготения, и частную теорию относительности, изучающую ИСО в отсутствии полей тяготения. В современной литературе частную теорию относительности называют специальной теорией относительности (СТО) или релятивистской механикой. Основные выводы именно этой теории мы рассмотрим в нашем курсе.

Наши понятия о пространстве и времени сформировались из повседневного опыта, в котором мы имели дело с макротелами при не слишком больших скоростях. Явления же, рассматриваемые СТО, протекают в лабораторных экспериментах, и у нас нет навыка и опыта в их описании.

7.1. Инварианты преобразований Галилея

Объединив уравнения (1.17)—(1.19) в систему, можно получить преобразования Галилея при переходе от одной ИСО к другой:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{v} t; \\ t &= t'; \\ \vec{a} &= \vec{a}', \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

где \vec{v} — скорость одной ИСО относительно другой.

Зададимся вопросом: одинаково ли выполняются законы механики в этих ИСО? Для Галилея было очевидно, что $m = m'$ (масса тела не меняется при переходе от одной ИСО к другой). Проверим справедливость основного закона механики, т.е. второго закона Ньютона (2.2). Пусть на тело в одной ИСО действует сила \vec{F} , а в другой — сила \vec{F}' . Все силы в механике делятся на потенциальные (т.е. функции относительного положения тел) и непотенциальные (они зависят от скорости движения тел одного относительно другого). Исходя из первого уравнения системы (7.1), можно записать:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}'_1 + \vec{v} t; \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}'_2 + \vec{v} t,\end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}', \quad (7.2)$$

т.е. относительные расстояния между точками в разных ИСО одинаковы, если они измеряются в один момент времени. Это означает, что потенциальные силы, действующие на тело в различных ИСО, будут одинаковыми. Продифференцировав (7.2) по времени, получим

$$\vec{v} = \vec{v}',$$

т.е. непотенциальные силы, действующие на тело в различных ИСО, также будут одинаковыми. Поэтому для любых сил выполняется равенство $\vec{F} = \vec{F}'$. Именно поэтому в различных ИСО второй закон Ньютона имеет одинаковый вид (одинаковую форму записи):

$$m \vec{a} = \vec{F}; \quad m \vec{a}' = \vec{F}'.$$

Закон сохранения импульса также сохраняет свой вид при переходе от одной ИСО к другой.

Рассмотрим инварианты преобразований Галилея.

1. Длина отрезка.

В классической физике пространство обладает так называемой евклидовой метрикой. Это означает, что расстояние между двумя точками с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) определяется по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (7.3)$$

Пусть две ИСО двигаются одна относительно другой вдоль оси OX .

Тогда преобразования Галилея (7.1) имеют вид:

$$x' = x - vt;$$

$$y' = y;$$

$$z' = z;$$

$$t' = t.$$

Отсюда следует, что длина отрезка между данными точками во второй ИСО будет определяться по формуле

$$l' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2} = l.$$

Таким образом, длина отрезка, измеренная в неподвижной ИСО, равна длине того же отрезка, измеренной в движущейся ИСО, если измерения проводились в один момент времени.

2. Временной интервал.

Поскольку в классической физике время не меняется при переходе от одной ИСО к другой, то временной интервал между двумя событиями $\Delta t = t_1 - t_2$, измеренный в неподвижной ИСО, в точности равен интервалу между этими событиями в движущейся ИСО:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = t_1 - t_2 = \Delta t.$$

3. Изменение импульса и работа.

Поскольку радиус-вектор материальной точки, а следовательно, и ее скорость зависят от выбора начальных условий в различных ИСО, то они не являются инвариантами. Значит, импульс тела и его энергия не являются инвариантами. Рассмотрим изменение импульса и изменение энергии.

В соответствии со вторым законом Ньютона

$$d\vec{p} = \vec{F} dt = \vec{F}' dt' = d\vec{p}',$$

а это означает, что изменение импульса инвариантно.

Работа по перемещению тела равна изменению его кинетической энергии:

$$dA = \left(\vec{F} d\vec{r} \right) = d(mV^2/2). \quad (7.4)$$

Записав преобразования Галилея в виде $d\vec{r} = d\vec{r}' + d\vec{R}$, $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}$, получим, что

$$\left(\vec{F} d\vec{r}\right) = \left(\vec{F} d\vec{r}'\right) + \left(\vec{F} d\vec{R}\right). \quad (7.5)$$

Воспользовавшись формулой (1.18), вычислим:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) &= d\left(\frac{m}{2} \left(\vec{V}' + \vec{v}\right)^2\right) = \frac{m}{2} d\left(\vec{V}'^2 + 2\vec{V}'\vec{v} + \vec{v}^2\right) = \\ &= d\left(\frac{m}{2} \vec{V}'^2\right) + d\left(m\vec{V}'\vec{v}\right) + d\left(\frac{m}{2} \vec{v}^2\right) = \\ &= d\left(\frac{m}{2} \vec{V}'^2\right) + \left(m d\vec{V}'\vec{v}\right) + \left(m\vec{V}' d\vec{v}\right) + \frac{m}{2} 2\vec{v} d\vec{v}. \end{aligned}$$

Поскольку $\vec{v} = \text{const}$, то $d\vec{v} = 0$, а поэтому

$$\begin{aligned} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) &= d\left(\frac{m}{2} \vec{V}'^2\right) + \left(m d\vec{V}'\vec{v}\right) = d\left(\frac{m}{2} \vec{V}'^2\right) + \left(m\vec{a}' dt\vec{v}\right) = \\ &= d\left(\frac{m}{2} \vec{V}'^2\right) + \left(\vec{F}' d\vec{R}\right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Тогда, подставляя (7.5) и (7.6) в (7.4), получаем:

$$\left(\vec{F} d\vec{r}'\right) + \left(\vec{F} d\vec{R}\right) = d\left(\frac{m}{2} \vec{V}'^2\right) + \left(\vec{F}' d\vec{R}\right),$$

отсюда следует, что $\left(\vec{F} d\vec{r}'\right) = d\left(\frac{m}{2} \vec{V}'^2\right)$, т.е. работа инвариантна.

Данный вывод показывает справедливость одинаковой записи законов сохранения импульса и энергии в различных ИСО.

7.2. Постулаты Эйнштейна

В 1860—1865 гг. английский ученый Д. Максвелл создал теорию электромагнитного поля и предсказал существование в свободном пространстве электромагнитного излучения (волн), которое распространяется со скоростью света. Это дало ему возможность предположить, что свет представляет собой один из видов электромагнитного излучения. В то время считалось, что электромагнитное излучение распространяется в особой невесомой среде (эфире), которая пронизывает все тела. Считалось, что с этим эфиром можно связать сис-

тему координат и получить особую (абсолютную) систему отсчета, в которой, по предположению, справедливы уравнения Максвелла для электромагнитных волн. Однако оказалось, что принцип относительности Галилея несовместим с уравнениями Максвелла (эти уравнения не были инвариантными относительно преобразований Галилея). Кроме того, в 1880 г. американские физики Майкельсон и Морли поставили эксперимент, который опровергал гипотезу неподвижного эфира и доказал, что эфир не может быть принят в качестве абсолютной системы отсчета. Они экспериментально доказали, что скорость света не зависит от скорости источника или приемника излучения. Это также противоречило преобразованиям Галилея.

Указанные противоречия удалось разрешить великому немецкому физiku Альберту Эйнштейну (1879—1955). Больше всего его беспокоила несовместимость уравнений Максвелла с классической физикой. Эйнштейн видоизменил определения массы, энергии, импульса, свойства пространства и времени. При построении своей теории он исходил из двух постулатов.

1. *Принцип относительности Эйнштейна:* все физические законы одинаковы во всех ИСО, а поэтому они должны быть сформулированы в виде, инвариантном относительно преобразований координат, отражающих переход от одной ИСО к другой.

2. *Принцип постоянства скорости света:* существует предельная скорость распространения взаимодействий, которая во всех ИСО одинакова и равна скорости электромагнитной волны в вакууме и не зависит ни от направления ее распространения, ни от движения источника и приемника.

Ясно, что второй постулат не согласуется с преобразованиями Галилея. Пусть система (X', Y', Z') движется со скоростью \vec{v} относительно системы (X, Y, Z) вдоль оси OY (рис. 7.1). Пусть источник света M , находящийся в системе (X', Y', Z') посылает световой сигнал со скоростью \vec{c} относительно системы (X', Y', Z') . Тогда,

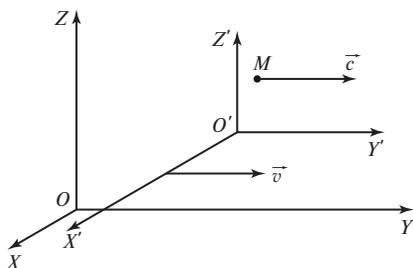


Рис. 7.1

согласно преобразованиям Галилея, скорость света относительно системы (X, Y, Z) должна быть равна $\vec{v} + \vec{c}$, что согласуется со «здравым смыслом». Заслуга Эйнштейна как раз и состоит в том, что он первый пришел к выводу об изменяемости свойств пространства и времени и о зависимости этих свойств от движения тел, с которыми связываются ИСО. Таким образом, мы вынуждены отказаться от преобразований Галилея и использовать другие преобразования, относительно которых скорость света оставалась бы инвариантной величиной.

7.3. Преобразования Лоренца

Получим новые преобразования координат, исходя из следующих предположений. Поскольку любая новая теория, которая имеет более широкую область применения, чем старая теория, должна включать последнюю как предельный случай (*принцип соответствия*), то получаемые преобразования должны отличаться от галилеевских на некоторый коэффициент. Кроме того, учтем возможное изменение свойств времени в разных ИСО, т.е. $t' \neq t$. Поскольку прямые и обратные преобразования Галилея имели вид

$$x = x' + vt'; \quad x' = x - vt,$$

то будем искать новые прямые и обратные преобразования в виде

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad x' = \gamma(x - vt).$$

Коэффициент γ в этих уравнениях одинаков в силу равноправия и эквивалентности прямых и обратных преобразований (ИСО равноправны). Дополним последние выражения уравнениями движения света в двух ИСО, учтя постоянство скорости света: $x = ct$; $x' = ct'$. Мы получили систему четырех уравнений. Решая ее, можно найти

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

а поэтому

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad t = \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad t' = \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (7.7)$$

Эти выражения были впервые получены в 1892 г. голландским физиком Х.А. Лоренцем (1853—1928). Уравнения Максвелла инвариантны относительно данных преобразований, но впервые физическую интерпретацию математических результатов Лоренца дал Эйнштейн.

7.4. Следствия преобразований Лоренца

1. Относительность одновременности событий

Пусть в системе (X, Y, Z) в точках с координатами x_1 и x_2 одновременно ($t_1 = t_2$) произошли два события (допустим, зажглись две лампочки). Зажгутся ли они одновременно в системе (X', Y', Z') ? Для ответа на вопрос найдем разность $t'_2 - t'_1$:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - x_2 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{t_1 - x_1 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{(x_1 - x_2) \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \neq 0.$$

Таким образом, два события, одновременные в одной ИСО, могут быть не одновременными в другой ИСО. В связи с этим возникает вопрос: не может ли случиться так, что в одной из ИСО следствие предшествует причине? Можно доказать, что при условии, что никакое материальное воздействие не может передаваться со скоростью большей, чем скорость света в вакууме, следствие никогда не может предшествовать причине.

2. Длительность события в разных ИСО

Пусть в системе (X', Y', Z') в точке с координатой x' произошло событие длительностью $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, где t'_1 и t'_2 — начало и конец события по часам, покоящимся в системе (X', Y', Z') . Наблюдатель в системе (X, Y, Z) по своим часам отметит начало и конец этого события в моменты времени t_1 и t_2 , которые равны:

$$t_1 = \frac{t'_1 + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Длительность события в системе (X, Y, Z) составит

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Время, которое измеряется по часам, связанным с движущимся телом, называется **собственным временем**. В нашем случае это интервал $\Delta t'$. Поскольку $\gamma > 1$, то $\Delta t > \Delta t'$, т.е. в движущейся ИСО время идет медленнее.

Эффект замедления времени в движущейся системе отсчета хорошо согласуется с опытными наблюдениями над элементарными частицами (π -мезонами), которые движутся в космических лучах со скоростями, близкими к скорости света.

3. Длина отрезка в разных ИСО

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси OX' системы (X', Y', Z') и неподвижный относительно этой системы координат. **Собственной длиной стержня** называется величина $l_0 = x'_2 - x'_1$, т.е. длина, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится. Длина его в системе (X, Y, Z) будет $l = x_2 - x_1$, причем измерения координат x_1 и x_2 проводятся в один и тот же момент времени по часам системы (X, Y, Z) . Поскольку эти два события — измерения координат x_1 и x_2 , одновременные в системе (X, Y, Z) , — будут неодновременными в системе (X', Y', Z') , то удобнее воспользоваться обратными преобразованиями Лоренца (второе уравнение в выражении (7.7)). Тогда

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Поэтому длина стержня в системе отсчета, относительно которой он движется, составит

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Наблюдатель в системе (X, Y, Z) находит, что длина движущегося стержня в $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ раз меньше его собственной длины.

4. Закон сложения скоростей

Пусть материальная точка движется в системе (X', Y', Z') . Поскольку ее координата вдоль оси OX' в данной системе определяется соотношением

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (7.8)$$

то ее скорость относительно данной системы координат

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \left(\frac{dt'}{dt} \right)^{-1}. \quad (7.9)$$

Из (7.8) находим:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{u - v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (7.10)$$

где u — скорость точки относительно системы (X, Y, Z) .

Из последнего выражения (7.7) определим

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - u \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (7.11)$$

Подставив (7.10) и (7.11) в (7.9), получим:

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}. \quad (7.12)$$

Из этого выражения следует, что

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \quad (7.13)$$

Напомним, что в классической физике выражениям (7.12) и (7.13) соответствовали $u' = u - v$ и $u = u' + v$ (см. (1.18)).

Применим релятивистский закон сложения скоростей к движению света в разных ИСО. Пусть свет распространяется в системе (X, Y, Z) : $u = c$. Тогда

$$u' = \frac{c - v}{1 - cv/c^2} = \frac{c - v}{c^2 - cv} c^2 = c.$$

Таким образом, в любой инерциальной системе отсчета скорость света постоянна и равна c , что и требуется вторым постулатом Эйнштейна.

Пусть в системе (X', Y', Z') материальная точка движется со скоростью $u' < c$, а сама система движется относительно (X, Y, Z) со скоростью $v < c$. Если, например, $u' = 0,9c$ и $v = 0,9c$, то классический закон сложения скоростей даст нам, что скорость точки относительно системы (X, Y, Z) составит $u = u' + v = 1,8c$. Теория относительности дает другой результат:

$$c - u = c - \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{c^2}{c} - \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{(c - v)(c - u')}{c(1 + u'v/c^2)} > 0,$$

откуда следует, что $u < c$, т.е. в любой ИСО скорость тела не может превысить c .

5. Пространственно-временной интервал

Поскольку пространство и время в СТО являются взаимосвязанными, то время выступает в преобразованиях Лоренца как равноправная четвертая координата. Можно представить существование четырехмерного пространства-времени, в котором оси X, Y, Z, ct взаимно перпендикулярны. Заметим, что координата по оси времени берется с множителем c , чтобы все координаты имели одинаковую размерность. Геометрическому расстоянию между двумя точками в

обычном трехмерном пространстве, которое определяется по теореме Пифагора (7.3), в СТО соответствует пространственно-временной интервал между событиями:

$$S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}.$$

Можно показать, что интервал инвариантен относительно преобразований Лоренца.

7.5. Динамика в специальной теории относительности

Поскольку выражение $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ инвариантно относительно преобразований Лоренца, то его можно представить как квадрат модуля (длину) некоторого вектора

$$\vec{\rho} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 + ict \vec{e}_4,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Таким образом, рассмотрим четырехмерное пространство координат, в котором сохраняется длина этого вектора, а преобразования Лоренца осуществляют лишь его поворот.

Выберем такой случай движения двух ИСО, при котором $y = y'$, $z = z'$, что позволит упростить математические выкладки. Ограничимся рассмотрением двумерного вектора $\vec{\rho} = x \vec{e}_1 + ict \vec{e}_4$. Основ-

ной закон классической динамики записывается в виде $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, где

$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$. Найдем выражение для релятивистского импульса.

Поскольку при нахождении преобразований Лоренца в преобразования Галилея вводился множитель γ , то введем этот множитель сейчас

в выражение для классического импульса: $\vec{p} = m_0 \gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Вычислим силу:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m_0 \gamma \frac{dx}{dt} \vec{e}_1 \right) + \frac{d}{dt} (m_0 \gamma ic \vec{e}_4) = f_1 \vec{e}_1 + f_4 \vec{e}_4. \quad (7.14)$$

Импульс определяется по следующей формуле:

$$\vec{p} = m_0 \gamma \frac{dx}{dt} \vec{e}_1 + m_0 \gamma ic \vec{e}_4 = m_0 \gamma v \vec{e}_1 + m_0 \gamma ic \vec{e}_4. \quad (7.15)$$

Выясним смысл слагаемых выражения (7.14). Обратим внимание, что при $\gamma = 1$ ($v \ll c$) первое слагаемое дает выражение второго закона Ньютона (если $m_0 = m$). Квадрат модуля импульса тела остается постоянным:

$$\begin{aligned} p^2 &= (m_0 \gamma v)^2 + (m_0 \gamma ic)^2 = (m_0 \gamma)^2 (v^2 - c^2) = \\ &= \frac{m_0^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} (v^2 - c^2) = -m_0^2 c^2. \end{aligned}$$

Поэтому производная по времени от квадрата импульса равна нулю:

$$\frac{dp^2}{dt} = \frac{d(\vec{p} \cdot \vec{p})}{dt} = 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 0.$$

С учетом (7.14) получаем:

$$\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \gamma v f_1 + m_0 \gamma ic f_4 = 0.$$

Тогда $f_4 = -\frac{vf_1}{ic} = i\frac{v}{c}f_1$. Видно, что при $v \ll c$ величина $f_4 \rightarrow 0$, т.е. \vec{f}_4 — исключительно релятивистский компонент силы. Его модуль

$$f_4 = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma ic) = i\frac{v}{c}f_1,$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2) = f_1 v.$$

Таким образом, аналогом второго закона Ньютона в релятивистской динамике выступает система уравнений

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{d}{dt}(m_0 \gamma v); \\ f_1 v &= \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2). \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Выражение

$$m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (7.17)$$

называется *релятивистской массой* тела. Отметим, что при скорости движения тела $v = 0$ его масса $m = m_0$ (*масса покоя*). При любой скорости движения $v > 0$ масса тела больше массы покоя. При $v = c$ масса тела неограниченно растет, что означает отсутствие массы покоя у таких материальных объектов (фотонов).

7.6. Связь массы и энергии

Рассмотрим второе уравнение системы (7.16): $f_1 \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma c^2)$,

откуда следует, что $f_1 dx = d(m_0 \gamma c^2)$.

Левая часть последнего равенства представляет собой элементарную работу по перемещению тела, поэтому правая часть должна быть равна полному дифференциалу энергии тела:

$$W = m_0 \gamma c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} c^2 = mc^2. \quad (7.18)$$

Данное выражение определяет **полную энергию** тела в релятивистской механике. Рассмотрим, что дает это выражение при классическом характере движения тела ($v \ll c$), для чего воспользуемся

пределом $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x$:

$$W = m_0 c \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx m_0 c \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Первое слагаемое полученного выражения $W_0 = m_0 c^2$ носит название **энергии покоя тела**. Второе слагаемое — его кинетическая энергия. Таким образом, кинетическая энергия тела — это разность полной энергии тела и его энергии покоя.

Выражение (7.18) устанавливает взаимосвязь между массой и энергией. Хорошо известно, что в природе происходит непрерывное превращение энергии из одной формы в другую. Как показывает опыт, форма существования массы тоже меняется. Например, при столкновении электрона и позитрона (которые обладают массами покоя), они могут аннигилировать, в результате чего образуются два гамма-кванта (порции электромагнитного излучения), не обладающих массами покоя. Однако гамма-квант обладает инертной массой, которая проявляется при столкновении с препятствием (например, давление света). При различных взаимопревращениях форм энергии и массы ни энергия, ни масса не исчезают и не возникают вновь, они только переходят из одной формы в другую так, что соблюдается выражение (7.18). Так, если два одинаковых шара из абсолютно неупругого материала движутся навстречу один другому с одинаковыми скоростями, то в результате удара они останавливаются. При этом исчезает кинетическая энергия макроскопического движения и увеличивается масса покоя этой системы.

Раздел II

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Блестящие успехи механики Ньютона в описании движения материальных тел привели к формированию так называемой механической картины мира, сводящей все явления к результатам механических движений различных тел макро- и микроразмеров. В частности, возникла механическая теория тепловых явлений — молекулярная физика.

Молекулярная физика — раздел физической науки, в котором рассматривается зависимость агрегатных состояний и свойств тел от их строения, взаимодействия между частицами, из которых состоит тела, а также характера движения частиц.

Рассмотрим системы, состоящие из большого числа частиц (молекул). Их состояние описывается различными параметрами, поведение которых изучается **термодинамическим** и **молекулярно-статистическим методами**, которые взаимно дополняют друг друга. В основе первого лежит применение эмпирических (опытных) законов: общефизического закона сохранения энергии (он в термодинамике называется **первым началом термодинамики**) и закона, определяющего направление протекания процессов взаимодействия в природе (**второе начало термодинамики**). Раздел физики, в котором свойства макроскопических систем изучаются с помощью термодинамического метода, называется **термодинамикой**. В основе молекулярно-статистического метода лежит представление о свойствах молекул. Математическая основа этого метода — теория вероятности.

Глава 8

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ

Любая выделенная макроскопическая система, которая рассматривается методами термодинамики, называется **термодинамической системой**. Все тела, не включенные в состав исследуемой системы, называются внешними телами или внешней средой. Молекулярная физика изучает термодинамические системы, состоящие из огромного числа молекул. Теория строения вещества, базирующаяся на молекулярных представлениях, называется **молекулярно-кинетической**. Ее основы заложил в середине XVIII в. М.В. Ломоносов.

8.1. Масса и размеры молекул

Для характеристики масс атомов и молекул применяются величины, называемые относительной атомной массой элемента и относительной молекулярной массой вещества. **Относительной атомной массой элемента** A_r называется отношение массы атома этого элемента к $1/12$ массы изотопа углерода $^{12}_6\text{C}$. **Относительной молекулярной массой вещества** M_r называется отношение массы молекулы этого вещества к $1/12$ массы изотопа углерода $^{12}_6\text{C}$. Как следует из их определения, относительные атомная и молекулярная массы являются безразмерными величинами. Единица массы, равная $1/12$ массы изотопа углерода $^{12}_6\text{C}$, называется **атомной единицей массы** (а.е.м.). Если ее обозначить как $m_{\text{ед}}$, то масса атома может быть вычислена как $A_r m_{\text{ед}}$, а масса молекулы как $M_r m_{\text{ед}}$.

Количество вещества, в котором содержится число частиц (атомов, молекул, ионов и т.д.), равное числу атомов в $0,012$ кг углерода $^{12}_6\text{C}$, называется **молем**. Из определения единицы количества вещества следует, что в 1 моле любого вещества содержится одно и то же число молекул. Опытным путем было установлено, что это число, называемое **числом Авогадро** N_A , составляет $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$. Если обозначить массу одной молекулы как m_0 , то масса произвольного количества вещества, содержащего ν молей, равна $m = m_0 N_A \nu = \mu \nu$. Величина $\mu = m_0 N_A$ называется **молярной массой** вещества. Она равна массе всех молекул 1 моля вещества, или отношению массы вещества к содержащемуся в нем количеству вещества.

Для углерода $^{12}_6\text{C}$ молярная масса $\mu = 0,012$ кг/моль, а масса атома равна $12m_{\text{ед}}$. Следовательно,

$$0,012 = N_A 12m_{\text{ед}},$$

откуда $m_{\text{ед}} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг. Поэтому масса любого атома равна $1,66 \cdot 10^{-27} A_r$ кг, а масса любой молекулы составляет $1,66 \cdot 10^{-27} M_r$ кг. Поскольку $N_A m_{\text{ед}} = 0,001$ кг/моль, то масса моля, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе.

Если мы захотим оценить размер молекул, то приближенную оценку объема одной молекулы можно получить, разделив объем моля вещества на число молекул в моле (число Авогадро). Например, моль

воды (т.е. 18 г) занимает объем 18 см^3 . Следовательно, объем каждой молекулы равен $3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$. Откуда следует, что линейные размеры молекулы воды приблизительно равны $\sqrt[3]{3 \cdot 10^{-29}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Таким образом, число атомов (или молекул) в любом теле огромно. Если считать, что движение каждого атома (или молекулы) подчиняется законам классической механики, то практически невозможно даже написать систему дифференциальных уравнений движения такого большого числа молекул. Поэтому поведение отдельной молекулы тела, например ее траектория и скорость, не могут быть изучены методами классической механики. Параметры движения молекулы изменяются во времени случайным образом. Огромная роль молекулярно-кинетической теории в развитии физики состоит в том, что она позволила единым образом подойти к изучению физических явлений, так или иначе связанных с характером движения молекул в телах.

Многие свойства тел в различных агрегатных состояниях объясняются различиями в характере движения атомов (или молекул) в телах. В совокупном поведении большого числа частиц, координаты и импульсы которых случайны в любой момент времени, проявляются особые статистические закономерности. Например, в газе можно определить средние значения скоростей движения молекул и их энергий, однозначно связанных с температурой газа. Свойства макроскопической системы частиц обусловлены не только индивидуальными свойствами самих частиц, но и особенностями их совокупных движений и средними значениями характеристик частиц.

Раздел теоретической физики, в котором с помощью статистического метода изучаются физические свойства макроскопических систем, называется *статистической физикой*. Связь между динамическими закономерностями, описывающими движение отдельных частиц системы, и статистическими закономерностями заключается в том, что законы движения отдельных частиц после усреднения по всей системе определяют свойства системы частиц, описываемые статистическим методом.

8.2. Параметры термодинамических систем. Состояние системы. Процесс

Термодинамическими параметрами (параметрами состояния) называются физические величины, служащие для характеристики состояния термодинамической системы. Примерами термодинамических параметров являются давление, объем, концентрация, температура и др.

Простейшим параметром является объем системы V . Он пропорционален количеству вещества в данной системе, поэтому относится к *экстенсивным* параметрам. Простейшими *интенсивными* параметрами (они не зависят от количества вещества в системе) являются давление и температура. Давлением называется физическая величина

$$p = \frac{dF_n}{dS}, \quad (8.1)$$

где dF_n — модуль силы, действующей на малый участок поверхности тела площадью dS перпендикулярно этой поверхности.

Если давление и объем имеют ясный и простой физический смысл, то гораздо более сложным и менее наглядным является понятие температуры. Ему подробно посвящен § 8.4. Однако заметим прежде всего, что понятие температуры имеет смысл только для равновесных состояний системы. **Равновесным состоянием** называется состояние термодинамической системы, в котором при постоянных внешних условиях остаются постоянными во времени все параметры системы и в системе отсутствуют потоки (например, потоки энергии или вещества). Другими словами, равновесное состояние — это состояние, в которое при неизменных внешних условиях приходит в конце концов термодинамическая система и дальше остается в этом состоянии сколь угодно долго.

Термодинамическим процессом называется любое изменение состояния термодинамической системы, при котором меняются ее термодинамические параметры. В равновесном термодинамическом процессе система проходит непрерывный ряд бесконечно близких термодинамически равновесных состояний. Реальные процессы изменения состояния системы происходят с конечной скоростью и поэтому не могут быть равновесными. Однако такие процессы будут тем ближе к равновесным, чем медленнее они совершаются. Поэтому равновесные процессы называются **квазистатическими**.

8.3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Рассмотрим движение молекул газа в сосуде и определим давление системы молекул на стенки сосуда. С этой целью выделим элемент поверхности стенки сосуда площадью S , а систему координат для описания движения молекул выберем таким образом, чтобы одна из осей координат (например, ось Ox) была перпендикулярна выделенному элементу стенки (рис. 8.1).

Хаотичные соударения молекул со стенками сосуда создают давление газа. При абсолютно упругом соударении со стенкой сосуда

молекула, имеющая проекцию скорости v_x , изменяет свой импульс на величину $|\Delta \vec{p}| = 2m_0v_x$, где m_0 — масса молекулы. Давление газа определится числом ударов молекул на выделенный элемент стенки площадью S в единицу времени. Это число ΔN равно числу молекул, находящихся в объеме $\Delta V = v_x S \Delta t$ (на рис. 8.1 этот объем заштрихован), где $\Delta t = 1$ с. Число молекул в любом выделенном объеме определяется произведением концентрации молекул на этот объем: $\Delta N = n \Delta V = n v_x S \Delta t$.

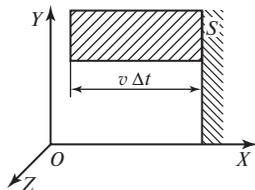


Рис. 8.1

Если предположить равновероятное движение молекул по всем направлениям в сосуде, то число молекул, движущихся вдоль каждой из трех осей системы координат, будет одинаковым и составит $1/3$ от общего числа молекул. Вдоль положительного направления оси OX (т.е. по направлению к стенке) будет двигаться половина от этого числа молекул, т.е. $1/6$ общего числа молекул в сосуде. Таким образом, окончательно получаем, что число молекул, достигающих элемента стенки сосуда площадью S за единицу времени перпендикулярно поверхности стенки, составляет

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \Delta V = \frac{1}{6} n v_x S \Delta t. \quad (8.2)$$

Поскольку при каждом ударе стенка получает от молекулы импульс $|\Delta \vec{p}| = 2m_0v_x$, то суммарный импульс, передаваемый стенке за единицу времени, определяем как $|\Delta \vec{p}| \Delta N$. Давление газа численно равно суммарному импульсу, передаваемому единице площади стенки за единицу времени. Тогда с учетом (8.2) получим:

$$p = \frac{|\Delta \vec{p}| \Delta N}{S} = \frac{2m_0v_x}{S} \frac{1}{6} n v_x S \Delta t = \frac{1}{3} m_0 v_x^2 n.$$

Полученное выражение удобно представить в виде

$$p = \frac{2}{3} n W_k, \quad (8.3)$$

где $W_k = m_0 v^2 / 2$ — кинетическая энергия одной молекулы газа.

Если скорости движения молекул газа в сосуде разные, т.е. скоростью v_i обладает доля молекул от общего числа, равная n_i/n , то кинетические энергии молекул в сосуде можно усреднить, получив

среднюю кинетическую энергию $\langle W_k \rangle = \frac{m_0}{2} \frac{\sum n_i v_i^2}{n}$. Тогда выражение (8.3) в общем случае можно записать следующим образом:

$$p = \frac{2}{3} n \langle W_k \rangle. \quad (8.4)$$

Полученное уравнение носит название *основного уравнения молекулярно-кинетической теории для давления*: давление газа пропорционально произведению средней кинетической энергии движения молекул газа на концентрацию молекул в сосуде.

8.4. Температура

К определению понятия температуры можно прийти на основании следующих соображений. Если соприкасающиеся тела находятся в состоянии теплового равновесия, то они не обмениваются энергией путем теплопередачи. В этом случае говорится, что оба тела обладают одинаковой температурой. Если же при осуществлении теплового контакта между телами одно из них передает энергию другому посредством теплопередачи, то в таком случае первое тело имеет большую температуру, чем другое. Целый ряд свойств тел — объем, электрическое сопротивление и т.п. — зависит от температуры. Любое из этих свойств может быть использовано для количественного определения температуры.

Пусть в качестве такого свойства выбран объем тела. Приведем тело, выбранное для измерения температуры (термометрическое тело), в тепловое равновесие с тающим льдом, измерим объем тела V_0 и припишем телу в этом случае температуру 0° . Затем приведем это же тело в тепловое равновесие с кипящей при атмосферном давлении водой, измерим объем тела V_{100} и припишем телу в этом состоянии температуру 100° . Если принять, что объем тела изменяется с температурой по линейному закону, то состоянию, в котором тело будет иметь объем V , следует приписать температуру

$$t = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} \cdot 100^\circ.$$

Такую температурную шкалу установил в 1742 г. шведский физик А. Цельсий (1701—1744). Проградуированный по этой шкале термометр можно использовать для измерения температуры произвольного тела, если приводить термометр в состояние теплового равновесия с телом, температуру которого необходимо измерить.

Однако при сравнении термометров, использующих разные термометрические тела, обнаруживается, что показания этих термометров, совпадая по способу градуировки при 0 и 100°, не совпадают при других температурах. На основе второго начала термодинамики может быть установлена температурная шкала, не зависящая от свойств термометрического тела. Эта шкала называется *термодинамической шкалой температур*. Температура T , отсчитанная по этой шкале, связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением

$$T = t + 273,15. \quad (8.5)$$

Единицу термодинамической (абсолютной) температуры называют Кельвин (обозначается К). Температуру по шкале Цельсия измеряют в градусах Цельсия (°C). Температура, равная 0 К, называется *абсолютным нулем*, ему соответствует $t = -273,15$ °C. В дальнейшем (см. § 9.5) будет показано, что абсолютная температура пропорциональна средней кинетической энергии поступательного движения молекул вещества. В этом заключается физический смысл абсолютной температуры.

8.5. Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа. Изопроцессы идеального газа

Можно доказать, что не все параметры термодинамической системы, находящейся в равновесном состоянии, независимы: внутренние параметры такой системы зависят только от ее внешних параметров и температуры. *Уравнение, связывающее любой термодинамический параметр системы с параметрами, принятыми в качестве независимых переменных, называется уравнением состояния*. Уравнение состояния, связывающее для однородного тела давление p , объем V и температуру T , называется термическим уравнением состояния:

$$f(p, V, T) = 0. \quad (8.6)$$

Конкретный вид функции f в термодинамике предполагается известным из опыта. Теоретический вывод уравнения состояния проводится только методами статистической физики. В этом состоит тесная взаимосвязь между статистическим и термодинамическим методами исследования.

Уравнение состояния (8.6) описывает свойства простых систем, у которых в отсутствие внешних полей имеется один внешний параметр — объем. Простейшим объектом, для которого в термодинамике может быть рассмотрено термическое уравнение состояния, является идеальный газ.

Идеальный газ — это такой газ, молекулы которого имеют пренебрежимо малый собственный объем и не взаимодействуют одна

с другой на расстоянии. В реальных газах существуют силы межмолекулярного притяжения и отталкивания. Силы отталкивания проявляются при взаимных столкновениях молекул и со стенками сосуда. Далее покажем, что при взаимных столкновениях молекулы газа ведут себя как абсолютно упругие шары диаметром $D_{\text{эфф}}$, зависящим от химической природы газа. Именно этот *эффективный диаметр молекулы* свидетельствует о наличии сил отталкивания между молекулами. Межмолекулярные силы притяжения преобладают на больших расстояниях, чем силы отталкивания. Поэтому реальные газы тем ближе по своим свойствам к идеальным газам, чем больше средние расстояния между молекулами, т.е. чем меньше концентрация молекул и соответственно плотность газа. При *нормальных условиях*, т.е. при давлении $p_0 = 101\,325$ Па и температуре $T_0 = 273,15$ К, многие газы (водород, гелий, неон, азот, кислород, воздух и др.) можно с хорошим приближением считать идеальными. При таких условиях концентрация молекул газа составляет $n_0 \approx 10^{25} \text{ м}^{-3}$, а средние расстояния между молекулами $\langle r \rangle \approx \sqrt[3]{1/n_0} \approx 10^{-8}$ м. Силами притяжения молекул можно пренебречь. Суммарный собственный объем всех молекул газа, содержащихся в 1 м^3 , составляет $V_{\text{собст}} = n\pi d^3/6 \approx 10^{-5} \text{ м}^3$. Следовательно, собственным объемом всех молекул тоже можно пренебречь по сравнению с объемом газа.

В курсе средней школы рассматривается термическое уравнение состояния идеального газа, называемое уравнением Клапейрона:

$$pV/T = \text{const}, \quad (8.7)$$

т.е. для данной массы идеального газа отношение произведения давления и объема к термодинамической температуре есть величина постоянная. Запишем это уравнение для 1 моля газа в виде

$$pV_m = RT, \quad (8.8)$$

где V_m — объем 1 моля газа (молярный объем).

Согласно *закону Авогадро*, при одинаковых давлениях и температурах молярные объемы различных газов также одинаковы. Из этого закона и (8.8) следует, что постоянная R одинакова для всех газов. Ее называют *универсальной газовой постоянной*. Экспериментально установлено, что $R = 8,31$ Дж/(моль·К). Для произвольной массы газа выражение (8.7) можно переписать следующим образом:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (8.9)$$

В такой наиболее общей форме записи термическое уравнение состояния идеального газа называется *уравнением Клапейрона—Менделеева*. Газ, в точности подчиняющийся уравнению состояния Клапейрона — Менделеева, называется *идеальным*.

Введем *постоянную Больцмана* k , равную отношению универсальной газовой постоянной к числу Авогадро:

$$k = R / N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К.} \quad (8.10)$$

Тогда из выражения (8.9) легко получить:

$$p = nkT, \quad (8.11)$$

где n — концентрация идеального газа.

Примерами простейших термодинамических процессов могут служить следующие процессы:

изотермический процесс, при котором температура системы не меняется ($T = \text{const}$);

изобарный процесс, при котором давление в системе не меняется ($p = \text{const}$);

изохорный процесс, при котором объем системы не меняется ($V = \text{const}$).

Эти процессы, происходящие с неизменной массой идеального газа, были изучены и описаны до появления уравнения Клапейрона — Менделеева, и их суть заключена в трех законах идеального газа.

Закон Бойля—Мариотта: если данная масса газа совершает изотермический процесс ($T = \text{const}$), то произведение давления газа на его объем не изменяется:

$$pV = \text{const.}$$

Закон Гей-Люссака: если данная масса газа совершает изобарный процесс ($p = \text{const}$), то объем газа изменяется пропорционально его температуре:

$$V = \text{const} \cdot T.$$

Закон Шарля: если данная масса газа совершает изохорный процесс ($V = \text{const}$), то давление газа изменяется пропорционально его температуре:

$$p = \text{const} \cdot T.$$

Изохорный, изобарный и изотермический процессы графически изображаются кривыми (соответственно изохорами, изобарами и изотермами) в различных системах координат: (p, V) ; (p, T) ; (V, T) . На рис. 8.2 изображены различные изотермы данной массы газа в координатах (p, V) , различные изобары данной массы газа в координатах (V, T) , различные изохоры данной массы газа в координатах (p, T) .

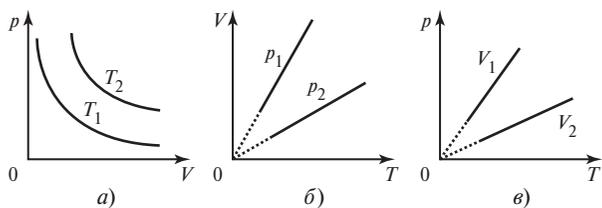


Рис. 8.2

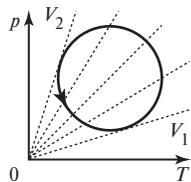


Рис. 8.3

Отметим то обстоятельство, что график любого изопроцесса разбивает координатную плоскость на две части:

1) во всех состояниях, которые на диаграмме (p, V) изображаются точками, лежащими выше изотермы T_1 (рис. 8.2, а), температура газа больше, чем T_1 , т.е. $T_2 > T_1$;

2) во всех состояниях, которые на диаграмме (V, T) изображаются точками, лежащими ниже изобары p_1 (рис. 8.2, б), давление газа больше, чем p_1 , т.е. $p_2 > p_1$;

3) во всех состояниях, которые на диаграмме (p, T) изображаются точками, лежащими ниже изохоры V_1 (рис. 8.2, в), объем газа больше, чем V_1 , т.е. $V_2 > V_1$.

Эти факты можно использовать, анализируя произвольные процессы. Допустим, на диаграмме (p, T) изображен график некоторого произвольного процесса (рис. 8.3). Проведя на диаграмме семейство изохор и рассмотрев пересечение их с графиком процесса, можно определить, как в этом сложном процессе изменялся занимаемый газом объем: изохора V_1 соответствует наибольшему объему газа в данном процессе, а изохора V_2 — наименьшему.

При рассмотрении смеси N идеальных газов, находящихся в одном сосуде, уравнение состояния (8.9) можно записать в виде:

$$pV = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2 + \dots + m_N/\mu_N)RT = \sum_{i=1}^N (m_i/\mu_i)RT.$$

Вместе с тем смесь идеальных газов можно представить таким идеальным газом, для которого будет справедливо соотношение $pV =$

$$= (m_{\text{см}}/\mu_{\text{см}})RT. \text{ Учтем, что масса смеси } m_{\text{см}} = \sum_{i=1}^N m_i, \text{ тогда получим}$$

$$\mu_{\text{см}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{\sum_{i=1}^N (m/\mu)_i}. \quad (8.12)$$

Выражение (8.12) определяет *эффективную молярную массу смеси идеальных газов* — молярную массу такого идеального газа, который, имея массу, равную массе смеси газов, в объеме, равном объему смеси, создает давление, равное давлению смеси при температуре, равной температуре смеси.

Модель идеального газа позволяет изучать свойства газов в кинетической теории простейшим образом. Применение всех моделей в физике всегда преследует одну цель — изучить определенную группу физических явлений, абстрагировавшись от ряда реальных условий, усложняющих данные явления. Например, рассматривая модель идеального газа, мы не учитываем, что реальные атомы и молекулы имеют сложную структуру и взаимодействуют между собой.

Глава 9

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Макроскопические свойства систем, состоящих из очень большого числа частиц, изучаются статистическим методом. В подобных системах существуют некоторые средние значения физических величин, которые характеризуют всю совокупность частиц в целом (в газе это средние значения скоростей теплового движения молекул, их энергий и т.д.). В системе частиц выполняются законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Все физические процессы в системе протекают непрерывно в пространстве и времени. Любую частицу в системе можно отличить от остальных таких же частиц. Она может иметь произвольные значения координат и импульсов (скоростей).

9.1. Элементарные сведения из теории вероятностей

Статистический метод основан на использовании теории вероятностей и определенных моделей строения изучаемых систем. Основное понятие теории вероятностей — событие, явление, о котором можно говорить, что оно либо произошло, либо нет. *Вероятностью данного события* P называется отношение числа n^* благоприятных исходов опытов (таких, в которых интересующее нас событие произошло) к полному числу опытов n , когда полное число опытов стремится к бесконечности:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^*}{n}.$$

Суммой двух событий A и B называется событие $A \cup B$, заключающееся в том, что произошло либо событие A , либо событие B . Вероятность суммы двух несовместных (одновременное осуществление которых невозможно) событий равна сумме вероятностей этих событий.

Произведением двух событий A и B называется событие $A \cap B$, состоящее в появлении совместно и события A , и события B . Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности первого события на вероятность второго (вычисленную в предположении, что первое событие произошло).

Если при измерении физической величины a возможны k исходов: с вероятностью P_1 в опыте получается $a = a_1$, с вероятностью P_2 $a = a_2$ и т.д., то *среднее значение величины a* определяется выражением

$$\langle a \rangle = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_k P_k,$$

где $P_1 + P_2 + \dots + P_k = 1$.

Среднее значение функции измеряемой величины a вычисляется следующим образом:

$$\langle \varphi(a) \rangle = \varphi(a_1) P_1 + \varphi(a_2) P_2 + \dots + \varphi(a_k) P_k.$$

Объектом статистической физики является система, содержащая очень большое число N молекул или атомов.

Пусть каждый из элементов системы имеет определенное значение какого-либо физического параметра z . **Функцией распределения** $f(z)$ элементов системы по параметру z называется отношение

$$f(z) = \frac{dN}{N dz}, \quad (9.1)$$

где dN — число частиц, у которых физический параметр лежит в пределах от z до $z + dz$; N — полное число частиц ансамбля.

Среднее значение параметра z по системе определяется формулой

$$\langle z \rangle = \int_{z_1}^{z_2} z f(z) dz, \quad (9.2)$$

где z_1 и z_2 — минимальное и максимальное значения параметра в системе.

Среднее значение $\varphi(z)$ произвольной функции параметра z :

$$\langle \varphi(z) \rangle = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) f(z) dz. \quad (9.3)$$

9.2. Распределение молекул по скоростям

Рассмотрим поведение молекул идеального газа в замкнутом объеме V . Если число частиц (молекул) достаточно велико, то любая молекула с одинаковой вероятностью может быть найдена в любом месте объема V . Выделим внутри объема V бесконечно малый элемент объемом dV . Обозначим вероятность того, что молекула находится внутри этого элемента следующим образом: $dP = G(x, y, z) dV$. Функция $G(x, y, z)$ называется **плотностью вероятности** обнаружения молекулы. Чтобы определить вероятность нахождения молекулы

в объеме V , необходимо просуммировать (проинтегрировать) элементарные вероятности по этому объему:

$$P = \int_V dP = \int_V G(x, y, z) dV.$$

Поскольку вероятность того, что молекулу можно обнаружить во всем объеме V равна 1 (она обязательно присутствует в этом объеме), то последнее равенство приобретает вид:

$$\int_V G(x, y, z) dV = 1. \quad (9.4)$$

Выражение (9.4) называется *условием нормировки плотности вероятности*.

Можно ли из равновероятного распределения молекул в пространстве сделать вывод о равновероятном распределении значений их скоростей? Одинаковы ли вероятности обнаружения молекул с различными скоростями? Нет. В рассматриваемом объеме всегда число молекул с большими и малыми скоростями относительно невелико. Молекулы изменяют свои скорости при взаимодействиях, происходящих по законам абсолютно упругого соударения. При таких соударениях число молекул, увеличивающих свои скорости всегда равно числу молекул, уменьшающих свои скорости, так как при абсолютно упругих соударениях одинаковые молекулы обмениваются скоростями. В этом состоит *принцип детального равновесия системы молекул*: число «прямых» ударов (выводящих молекулу в диапазон больших значений скоростей) равно числу «обратных» ударов (выводящих молекулу в диапазон меньших значений скоростей). Поставим своей задачей определить распределение молекул по скоростям движения. Такая задача была решена Д. Максвеллом, а поэтому полученный закон называется *максвелловским распределением молекул по скоростям*.

Обозначим вероятность того, что выбранная молекула имеет значение модуля проекции скорости на какое-либо направление OX в интервале $v_x \div v_x + \Delta v_x$ как $F_x \Delta v_x$, т.е. это — вероятность того, что скорость выбранной молекулы имеет определенное направление.

Найдем плотность вероятности F_x в виде $F_x = A e^{-\alpha v_x^2}$, где A —

некоторая постоянная величина. Условие нормировки такой плотности вероятности запишем в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\alpha v_x^2} dv_x = 1. \quad (9.5)$$

Пределы интегрирования в (9.5) определяются исходя из того, что, согласно классической физике, скорости всех молекул в некотором объеме могут быть любыми как по модулю, так и по направлению. Интеграл (9.5) называется интегралом Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\alpha v_x^2} dv_x = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = A \sqrt{\pi/\alpha} = 1.$$

Из последнего выражения получаем, что $A = \sqrt{\alpha/\pi}$.

Поскольку все направления движения молекул (в трехмерной системе координат это OX , OY и OZ) одинаковы, то для плотностей вероятностей по всем направлениям составим выражения:

$$F_x = \sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha v_x^2};$$

$$F_y = \sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha v_y^2};$$

$$F_z = \sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha v_z^2}.$$

Если модуль скорости молекулы равен v , то это значит, что проекции ее скорости одновременно принимают определенные значения v_x, v_y, v_z . Следовательно, плотность вероятности обнаружения молекулы, проекции скорости которой лежат в интервалах $v_x \div v_x + \Delta v_x, v_y \div v_y + \Delta v_y, v_z \div v_z + \Delta v_z$, можно по свойству умножения вероятностей найти таким образом:

$$f = F_x F_y F_z = (\alpha/\pi)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = (\alpha/\pi)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha v^2}.$$

Рассмотрим так называемое «пространство скоростей» (рис. 9.1). В нем по осям координат вместо привычных пространственных координат x, y, z откладываются значения проекций скоростей молекул на выбранные направления. В пространстве скоростей поведение молекулы описывается не положением радиуса-вектора \vec{r} , а положением вектора скорости \vec{v} . Все молекулы, проекции скоростей

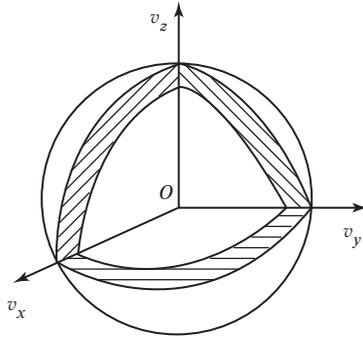


Рис. 9.1

которых лежат в интервалах $v_x \div v_x + \Delta v_x$, $v_y \div v_y + \Delta v_y$, $v_z \div v_z + \Delta v_z$, в пространстве скоростей характеризуются набором векторов \vec{v} , у которых концы лежат внутри объема ΔV_v . Этот объем образует сферический слой (на рис. 9.1 сечение этого слоя показано штриховкой). Слой имеет радиус v и толщину Δv . Следовательно, объем такого слоя

$$\Delta V_v = 4\pi v^2 \Delta v.$$

В результате вероятность того, что молекула имеет скорость в диапазоне $v \div v + \Delta v$, определяется следующим образом (произведение плотности вероятности на объем в пространстве скоростей):

$$\Delta P = f \Delta V_v = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha v^2} 4\pi v^2 \Delta v. \quad (9.6)$$

Общее число таких молекул в единице объема может быть найдено умножением концентрации молекул n (число молекул в единице объема) на вероятность ΔP :

$$\Delta n = n \Delta P = 4\pi n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha v^2} v^2 \Delta v.$$

Теперь найдем α .

Хаотичные соударения молекул со стенками сосуда создают давление газа. Пусть молекула летит по направлению оси OX перпендикулярно стенке. При абсолютно упругом соударении со стенкой сосуда молекула, имеющая проекцию скорости v_x , изменяет свой импульс на величину $|\Delta \vec{p}| = 2m_0 v_x$, где m_0 — масса молекулы. Давление газа определится числом ударов молекул на выделенный

элемент стенки площадью S в единицу времени. Это число ΔZ равно числу молекул, находящихся в объеме $\Delta V = v_x S \Delta t$, где $\Delta t = 1$ с (произведению концентрации молекул на этот объем): $\Delta Z = n \Delta V = n v_x S$. Полученное выражение необходимо еще умножить на вероятность того, что скорость молекулы лежит в интервале $v_x \div v_x + \Delta v_x$. Эта вероятность равна $F_x \Delta v_x$. Итак,

$$\Delta Z = n v_x S F_x \Delta v_x = n v_x S \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_x^2} \Delta v_x.$$

Поскольку при каждом ударе стенка получает от молекулы импульс $|\Delta \vec{p}| = 2 m_0 v_x$, то суммарный импульс, передаваемый стенке за единицу времени, определится как $|\Delta \vec{p}| \Delta Z$. Давление газа численно равно суммарному импульсу, передаваемому единице площади стенки за единицу времени:

$$p = \frac{|\Delta \vec{p}| \Delta Z}{S} = \frac{2 m_0 v_x}{S} n v_x S \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_x^2} \Delta v_x;$$

$$p = 2 m_0 n \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_x^2} v_x^2 \Delta v_x. \quad (9.7)$$

Выражение (9.7) позволяет найти давление, которое оказывают на стенки сосуда только молекулы, летящие в положительном направлении оси OX . Чтобы найти полное давление газа, необходимо проинтегрировать полученное выражение по всем неотрицательным значениям проекций скоростей:

$$p = 2 m_0 n \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} v_x^2 dv_x. \quad (9.8)$$

Результат вычисления интеграла в (9.8) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} v_x^2 dv_x =$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}.$$

Поэтому

$$p = 2 m_0 n \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2} m_0 n \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом, найдено значение α : $\alpha = \frac{m_0 n}{2p}$. При тепловом равновесии идеального газа справедливо уравнение его состояния $p = nkT$, поэтому $\alpha = \frac{m_0 n}{2nkT} = \frac{m_0}{2kT}$.

Вернемся к выражению (9.6):

$$\Delta P = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha v^2} \cdot 4\pi v^2 \Delta v = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 \Delta v. \quad (9.9)$$

Полученное выражение позволяет определить вероятность того, что молекула имеет скорость в диапазоне $v \div v + \Delta v$. Такое распределение получено при следующих допущениях: все молекулы одинаковы; газ — идеальный, в отсутствие силовых полей; в газе наблюдается состояние теплового равновесия (принцип детального равновесия). Рассматривая бесконечно малый диапазон скоростей, (9.9) можно записать следующим образом:

$$dP = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv. \quad (9.10)$$

Тогда плотность вероятности попадания молекулы в интервал скоростей $v \div v + dv$ составит:

$$f = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2. \quad (9.11)$$

График распределения этой плотности вероятности представлен на рис. 9.2. Поскольку $dP = f(v) dv$, то площадь под элементом графика $f(v)$ будет определять вероятность обнаружения молекулы со скоростью, значение которой лежит в интервале $v \div v + dv$ (на рис. 9.2 эта площадь заштрихована).

Условие (9.5) нормировки плотности вероятности $f(v)$

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad (9.12)$$

физически означает то, что всегда найдется молекула, скорость которой лежит в интервале $0 \div \infty$. С изменением температуры график распределения плотности вероятности изменяет свой вид. Например, на рис. 9.3 показано, что с увеличением температуры максимум функции становится менее выраженным и переходит в область больших скоростей. Это означает, что увеличивается доля молекул, обладающих большими скоростями.

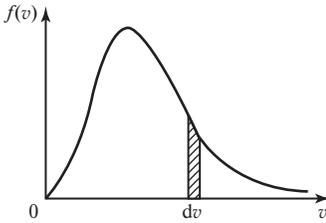


Рис. 9.2

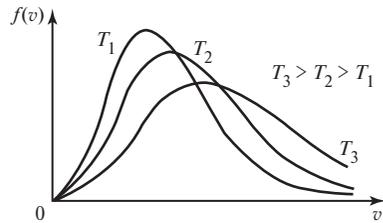


Рис. 9.3

Теперь по определению (9.1) запишем максвелловский закон распределения молекул газа по модулям скоростей, который определяет, какое число dN молекул газа из общего числа его молекул N в единице объема имеет при данной температуре скорости, заключенные в интервале от v до $v + dv$:

$$dN = N dP = N f(v) dv = N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv. \quad (9.13)$$

С помощью такого распределения можно, например, рассчитать среднюю кинетическую энергию системы молекул. Воспользуемся определением (9.3). Кинетическая энергия молекулы — это функция ее скорости $\varphi(z) = m_0 v^2 / 2$, поэтому

$$\left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{m_0 v^2}{2} f(v) dv = \int_0^{\infty} \frac{m_0 v^2}{2} \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv = \frac{3}{2} kT.$$

9.3. Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости молекул

Проанализируем поведение функции распределения молекул по скоростям. Найдем, при какой скорости наблюдается максимальное значение функции $f(v)$. Такую скорость v_B назовем **наиболее вероятной скоростью молекул**. В единичном интервале скоростей вблизи v_B будет находиться больше всего молекул. Для того чтобы найти v_B , продифференцируем выражение (9.11):

$$f' = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left[2v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} + v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \left(-\frac{2vm_0}{2kT} \right) \right].$$

Приравняв полученную производную к 0, найдем значение v_B :

$$2v_B - \frac{v_B^3 m_0}{kT} = 0 \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (9.14)$$

Средняя арифметическая скорость всех молекул будет отличаться от v_B , поскольку в соответствии с (9.2)

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{\infty} \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^3 dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \quad (9.15)$$

Очень часто в молекулярной физике используется понятие **среднеквадратичной скорости молекул**. Так называется скорость, равная квадратному корню из среднего значения квадрата скоростей молекул $v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$. По определению (9.2) найдем

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \int_0^{\infty} \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^4 dv = \frac{3kT}{m_0}.$$

Тогда

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m_0}. \quad (9.16)$$

Сравнивая (9.14), (9.15) и (9.16), отметим, что $v_B < \langle v \rangle < v_{\text{ср.кв}}$. Эти скорости нанесены на график плотности вероятности на рис. 9.4.

Рассматривая кривую плотности вероятности распределения молекул по скоростям, можно сделать следующие выводы:

1. Функция распределения плотности вероятности (9.11) позволяет найти не число молекул, скорости которых лежат в определенном интервале скоростей, а только долю общего числа молекул.
2. Относительное число молекул (доля общего числа молекул), обладающих скоростями в определенном интервале, зависит не

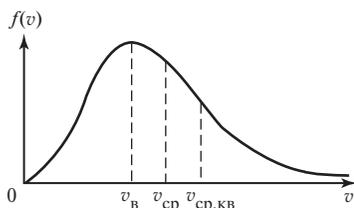


Рис. 9.4

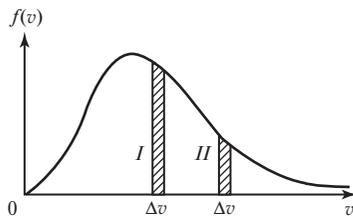


Рис. 9.5

только от размера интервала скоростей, но и от того, какому участку принадлежит данный интервал. Например, на рис. 9.5 видно, что при одном и том же размере интервала скоростей (его ширина составляет Δv) относительное число молекул, скорости которых попадают в интервал I , будет больше, чем относительное число молекул, скорости которых попали в интервал II .

3. Максвелловское распределение молекул по скоростям нельзя использовать для анализа систем молекул при очень высоких температурах. При таких температурах максимум кривой распределения резко «сдвигается» в область больших скоростей, и скорости молекул могут даже превысить скорость света.

4. Максвелловское распределение молекул по скоростям нельзя использовать для анализа систем молекул при очень низких температурах. При таких температурах максимум кривой распределения резко «сдвигается» в область малых скоростей, и кривая сильно сужается. Тогда в рассматриваемом интервале скоростей может оказаться очень мало молекул, следовательно, к такому числу частиц нельзя применять методы теории вероятностей.

Для примера рассмотрим поведение молекул азота (основной газ, составляющий земную атмосферу) при температуре $T = 273$ К. Напомним, что молярная масса азота $\mu = 0,028$ кг/моль. При такой температуре наиболее вероятная скорость молекулы, в соответствии с (9.14), составит:

$$v_B = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/\mu} = \sqrt{2 \cdot 8,31 \cdot 273/0,028} = 403 \text{ м/с.}$$

Подставим выражение для наиболее вероятной скорости (9.14) в функцию распределения (9.11):

$$f = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 = 4\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} v_B}\right)^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2;$$

$$f = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_B^3} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Используя последнее выражение, очень легко находить ответы на вопросы о распределении частиц по скоростям. Найдем долю молекул азота, скорости которых принимают значения от 403 до 413 м/с

(ширина интервала скоростей составляет 10 м/с, а середина интервала — 408 м/с):

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_v^{v+\Delta v} f dv = \int_{403}^{413} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_B^3} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_B^3} \int_{403}^{413} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv.$$

Для вычисления последнего интеграла учтем, что показатель экспоненты можно записать следующим образом: $\frac{m_0 v^2}{2kT} = \frac{v^2}{v_B^2}$. Кроме того,

воспользуемся теоремой о среднем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_B^3} \int_{403}^{413} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{403^3} \cdot 408^2 e^{-\frac{408^2}{403^2}} \cdot (413 - 403) = 0,02. \end{aligned}$$

Таким образом, только 2 % общего числа молекул имеют скорости, значения которых лежат в выбранном интервале. Если сместить интервал в другой участок скоростей, например выбрать диапазон 1000 ÷ 1010 м/с (ширина интервала скоростей по-прежнему составляет 10 м/с, а середина интервала — 1005 м/с), то только 0,07 % общего числа молекул попадут в этот интервал скоростей.

Весьма любопытен вывод, который получается при ответе на вопрос: «Может ли Земля потерять атмосферу?» Поскольку вторая космическая скорость (скорость «убегания» от поля тяжести планеты) для Земли равна 11 200 м/с, то приведенным выше способом можно определить долю молекул, скорости которых лежат в диапазоне 11 200 ÷ 20 000 м/с (ширина интервала скоростей составляет 8800 м/с, а середина интервала — 15 600 м/с). Вычисления в этом случае дают ответ

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{403^3} \cdot 15\,600^2 e^{-\frac{15\,600^2}{403^2}} \cdot 8800 = 1,8 \cdot 10^{-29}.$$

Следовательно, в земной атмосфере все-таки существуют молекулы, скорость которых позволяет им покидать пределы тяготения Земли. Однако сделанный расчет, конечно же, является только оценочным, так как температура на границе атмосферы не равна 273 К. Кроме того, разреженность атмосферы в ее верхних слоях не позволяет говорить о справедливости методов теории вероятностей в подобных условиях.

9.4. Барометрическая формула

Распределение Максвелла — это распределение молекул по скоростям, или по кинетическим энергиям. Действительно, в показателе экспоненты в (9.11) стоит отношение кинетической энергии молекулы к kT . Произведение постоянной Больцмана и температуры характеризует среднюю кинетическую энергию движения молекул, т.е. энергию их теплового движения.

Установим теперь распределение молекул по потенциальным энергиям. Л. Больцман получил *барометрическую формулу* — зависимость давления газа от высоты в потенциальном поле тяжести Земли.

Рассмотрим равновесие некоторого объема газа, находящегося на высоте h от поверхности Земли, уровень которой выберем за условный ноль отсчета потенциальной энергии (рис. 9.6). Атмосферное давление на данном уровне обозначим как p_0 . Пусть объем газа — это цилиндр высотой dh . На рис. 9.6 указаны давления, действующие на рассмотренный газовый цилиндр со стороны выше- и нижележащих слоев атмосферы. Поскольку столбик газа находится в равновесии, то

$$(p + dp)S + dm g - pS = 0,$$

где S — площадь основания столбика; dm — его масса.

Выразив массу объема газа через его плотность как $dm = \rho S dh$, получим дифференциальное уравнение

$$\rho S g dh + dp S = 0. \quad (9.17)$$

Плотность газа, в соответствии с уравнением состояния идеального газа, определяется как $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$, тогда уравнение (9.17) запишется в виде

$$dp = -\frac{p\mu}{RT} g dh.$$

Знак «—» в этом уравнении показывает, что давление газа уменьшается с ростом высоты слоя от поверхности Земли. Разделим пере-

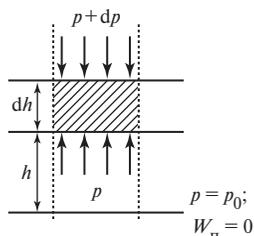


Рис. 9.6

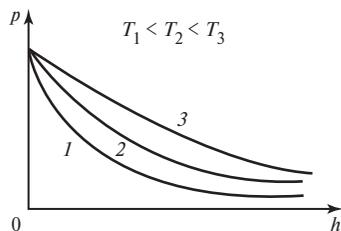


Рис. 9.7

менные в уравнении: $\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh$, а потом проинтегрируем левую и правую части:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^h \frac{\mu g}{RT} dh; \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g h}{RT}; \quad p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}.$$

Так как $\mu/R = m_0/k$, а $m_0 g h = W_{\text{п}}$, то последнее выражение перепишем следующим образом:

$$p = p_0 e^{-\frac{W_{\text{п}}}{kT}}. \quad (9.18)$$

Полученное соотношение и есть барометрическая формула, которая определяет зависимость давления идеального газа от потенциальной энергии его молекул (от высоты). Поскольку $p = nkT$, то ее можно записать в виде

$$n = n_0 e^{-\frac{W_{\text{п}}}{kT}}. \quad (9.19)$$

Уравнение (9.19) — это распределение концентрации молекул в зависимости от их потенциальной энергии. Из него следует, что наибольшая концентрация молекул там, где $W_{\text{п}} = 0$, т.е. вблизи поверхности Земли. График зависимости (9.18) представлен на рис. 9.7.

Справедливость установленного Л. Больцманом закона для земной атмосферы не могла быть проверена в XIX в.: для изменения атмосферного давления в e раз (т.е. $\frac{W_{\text{п}}}{kT} = 1$) необходимо подняться над уровнем Земли на высоту примерно 9 км.

9.5. Распределение энергии молекулы по степеням свободы

Механическая энергия любой молекулы идеального газа — это кинетическая энергия ее движения, так как потенциальное взаимодействие между такими молекулами отсутствует. Энергия движения молекулы определяется, в свою очередь, энергией ее поступательного движения, энергией ее вращения и энергией колебания атомов в молекуле:

$$W_{\text{к}} = W_{\text{пост}} + W_{\text{вращ}} + W_{\text{кол}}.$$

Будем рассматривать в дальнейшем только «жесткие» молекулы, атомы в которых не совершают колебаний, т.е. $W_{\text{кол}} = 0$. Ранее (см. § 9.2) определено, что $\langle W_{\text{к}} \rangle =$

$$= \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kT. \text{ Это выражение было}$$

получено для системы молекул, которые представлялись в виде шариков, упруго соударяющихся один с другим. Такие шарики двигались поступательно вдоль любого из направлений трехмерной декартовой системы координат. Положение такой молекулы в пространстве определяется набором трех независимых переменных — координат центра масс шара x , y , z (рис. 9.8). Можно сказать, что шарообразная молекула способна совершать в пространстве три независимых перемещения. Вращением шара вокруг любого из его диаметров при этом можно пренебречь, так как поворот шара вокруг диаметра не изменяет его положения в пространстве.

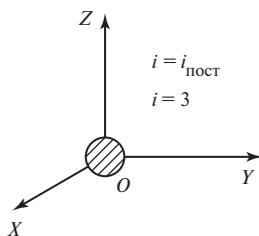


Рис. 9.8

Минимальное число независимых переменных, однозначно определяющих положение тела в пространстве (или минимальное число независимых перемещений тела в пространстве), называется числом степеней свободы тела. Из приведенных рассуждений ясно, что число степеней свободы шарообразной молекулы равно 3. В дальнейшем будем обозначать число степеней свободы через i . Ясно, что шарообразной молекулу можно считать, если она состоит из одного атома (He, Ar, Ne). Таким образом, для одноатомной молекулы $i = 3$.

Л. Больцман предположил, что кинетическая энергия молекулы равномерно распределена по степеням ее свободы, т.е. каждому независимому перемещению молекулы соответствует одна и та же энергия.

Поскольку для системы одноатомных молекул $\langle W_{\text{к}} \rangle = \frac{3}{2} kT$,

а $i = 3$, то можно сделать вывод, что каждому из трех поступательных движений соответствует энергия $\epsilon_i = \frac{1}{2} kT$. **Закон Больцмана**

о равномерном распределении энергии молекул по степеням свободы звучит следующим образом: *если система молекул находится в тепловом равновесии при температуре T , то средняя кинетическая энергия молекул равномерно распределена по степеням свободы, причем на каждую степень свободы приходится энергия $\epsilon_i = \frac{1}{2} kT$.*

Какие выводы будут следовать из этого закона для неоднородных молекул? Рассмотрим двухатомную молекулу (H_2 , O_2 , CO , N_2),

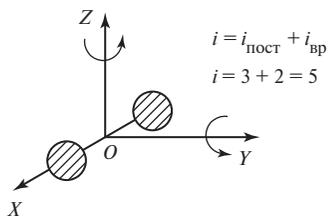


Рис. 9.9

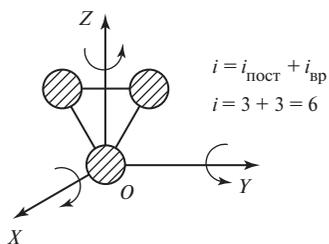


Рис. 9.10

выбрав оси координат таким образом, чтобы одна из осей совпадала с продольной осью молекулы (рис. 9.9). Двухатомная молекула может совершать пять независимых перемещений в пространстве: три поступательных вдоль осей координат и два вращательных вокруг двух осей. Поворот молекулы вокруг третьей оси координат (оси OX на рис. 9.9) не приводит к изменению ее положения в пространстве. Таким образом, у двухатомной молекулы три поступательных степени свободы и две вращательных, в целом $i = 5$. Строение молекулы водяного пара (H_2O) таково, что ее поведение в пространстве соответствует поведению двухатомных молекул, поэтому для водяного пара $i = 5$.

Если рассмотреть трехатомную молекулу (рис. 9.10), то нетрудно установить, что у нее будет три поступательных степени свободы и три вращательных, в целом $i = 6$.

Глава 10

ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

В основе термодинамического метода лежит несколько фундаментальных законов (начал), которые установлены на основании обобщения большой совокупности опытных фактов. Термодинамический метод основан на анализе превращения энергии в системе. При этом в термодинамике не рассматривается внутреннее строение систем и характер движения частиц в этих системах. Выводы термодинамики имеют весьма общий характер. Законы термодинамики можно применить к электрическим и магнитным явлениям, процессам теплового излучения, радиоактивного распада и т.п. Нет такой области физики, химии и биологии, в которой нельзя было бы пользоваться термодинамическим методом. Однако при этом термодинамика не вникает в процессы, происходящие внутри вещества, не рассматривает механизмы этих процессов.

10.1. Внутренняя энергия системы молекул. Работа в термодинамике. Количество теплоты

Полная энергия W термодинамической системы включает в себя кинетическую энергию $W_{\text{к}}^{\text{сист}}$ механического движения системы как целого, потенциальную энергию $W_{\text{п}}^{\text{внеш}}$ системы во внешнем потенциальном поле и внутреннюю энергию U — энергию всех видов движения и взаимодействия частей системы, зависящую только от внутреннего строения системы. Таким образом,

$$W = W_{\text{к}}^{\text{сист}} + W_{\text{п}}^{\text{внеш}} + U.$$

В дальнейшем будем рассматривать термодинамические системы, которые макроскопически неподвижны и не находятся во внешних полях. Для таких систем полная и внутренняя энергия совпадают.

В термодинамике под внутренней энергией понимают лишь кинетическую энергию теплового движения молекул, потенциальную энергию взаимодействия атомов в молекуле, а также потенциальную энергию взаимодействия молекул между собой.

Внутренняя энергия является однозначной функцией состояния термодинамической системы. Это означает, что внутренняя энергия

в каком-либо произвольно выбранном состоянии не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние, т.е. изменение внутренней энергии ΔU_{12} при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса перехода. В частности, если в результате какого-либо процесса система возвращается в исходное состояние, то полное изменение внутренней энергии равно нулю.

Обмен энергией между закрытой термодинамической системой и внешними телами может осуществляться двумя качественно различными способами: совершением работы и теплообменом. С учетом этого, в термодинамике понятие механической работы приобретает несколько иной смысл, чем в механике. *Работой, совершаемой над системой, называется энергия, передаваемая термодинамической системе при силовом взаимодействии с ней. Количеством теплоты (теплотой) называется энергия, передаваемая термодинамической системе внешними телами путем теплообмена.*

Работу над системой производят внешние силы. В отсутствие внешних силовых полей обмен энергией между неподвижной системой и внешней средой может осуществляться путем совершения работы лишь в процессе изменения объема и формы системы. Необходимо учитывать, что в соответствии с третьим законом Ньютона работа, совершаемая внешними силами над системой, численно равна и противоположна по знаку работе, совершаемой самой системой над внешней средой, т.е. против внешних сил.

Теплообмен происходит между телами или частями одного и того же тела, нагретыми до разной температуры. Способы осуществления теплообмена — конвекция, теплопроводность и излучение.

В отличие от внутренней энергии системы, которая является однозначной функцией состояния этой системы, понятия теплоты и работы имеют смысл только в связи с процессом изменения состояния системы. Они являются энергетическими характеристиками процесса. Для перевода системы из одного и того же начального состояния 1 в одно и то же конечное состояние 2 необходимо совершить над системой разную работу и передать системе разную теплоту. Можно сказать, что в произвольном состоянии термодинамическая система обладает определенным запасом внутренней энергии, но нельзя говорить ни о «запасе работы», ни о «запасе теплоты» в системе. Итак, работа и теплота не являются функциями состояния системы. При расчете элементарной (бесконечно малой) работы, совершенной над системой, и элементарного (бесконечно малого) количества теплоты, переданного системе, будем обозначать их соответственно δA и δQ . Бесконечно малое же изменение внутренней энергии системы, вызванное такими процессами, будем обозначать dU , поскольку бесконечно малое изменение функции состояния может быть опреде-

лено как ее дифференциал. Следовательно, в любом замкнутом (круговом) процессе, в результате которого система возвращается в исходное состояние, $\oint dU = 0$.

Совершение работы над системой может изменить любой вид энергии системы. Если же энергия передается системе в форме теплоты, то она идет на увеличение только внутренней энергии системы. Часто оба способа передачи энергии системе осуществляются одновременно. Например, при нагревании газа в сосуде с подвижным поршнем газу сообщается теплота и происходит увеличение его объема. При этом совершается работа против внешнего давления.

10.2. Первое начало термодинамики

Существование двух способов передачи энергии системе позволяет проанализировать с энергетической точки зрения равновесный процесс перехода системы из одного состояния 1 в другое состояние 2. В соответствии с законом сохранения энергии изменение внутренней энергии системы ΔU_{12} в таком процессе равно сумме работы A'_{12} , совершаемой над системой внешними силами, и теплоты Q_{12} , сообщенной системе:

$$\Delta U_{12} = A'_{12} + Q_{12}. \quad (10.1)$$

Обозначим работу, совершенную системой против внешних сил, как A_{12} . Тогда, поскольку $A_{12} = -A'_{12}$, то

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}. \quad (10.2)$$

Выражения (10.1) и (10.2) являются математической записью закона сохранения энергии в термодинамике. Он называется **первым началом термодинамики**: *изменение внутренней энергии системы равно сумме работы, совершенной внешними силами над системой, и количества теплоты, сообщенного системе*. Иная формулировка: *количество теплоты, сообщенное системе, расходуется на изменение внутренней энергии этой системы и на совершение системой работы над внешними телами*.

При сообщении системе бесконечно малого количества теплоты первое начало термодинамики записывается следующим образом:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (10.3)$$

Все физические величины, входящие в (10.3), могут быть как положительными, так и отрицательными. Если к системе подводится теплота, то $\delta Q > 0$, если теплота отводится, то $\delta Q < 0$. Общее коли-

чество теплоты, сообщаемое системе в процессе 1-2, равно алгебраической сумме количеств теплоты, сообщаемых системе на всех участках процесса: $Q_{12} = \int_1^2 \delta Q$. Если система совершает работу над

внешними телами, то считается, что $\delta A > 0$, если же над системой внешние силы совершают работу, то $\delta A < 0$. Работа, совершаемая системой в процессе 1-2, равна алгебраической сумме работ, совершаемых системой на всех участках процесса: $A_{12} = \int_1^2 \delta A$.

10.3. Применение первого начала термодинамики для идеального газа. Политропные процессы

Внутренняя энергия идеального газа. Рассмотрение первого начала термодинамики для идеального газа начнем с получения формулы для расчета внутренней энергии системы молекул, образующих идеальный газ. В соответствии с определением идеального газа его внутренняя энергия будет представлять собой лишь кинетическую энергию движения молекул, поскольку потенциальная энергия взаимодействия молекул в идеальном газе отсутствует. Как было показано в § 9.5, кинетическая энергия одной молекулы газа определяется соотношением $\varepsilon = \frac{i}{2} kT$, где i — число степеней свободы молекулы. Тогда кинетическая энергия молекул, содержащихся в моле идеального газа, может быть найдена как $\varepsilon_m = N_A \frac{i}{2} kT$. Если же рассмотреть ν молей идеального газа, то кинетическая энергия его молекул составит:

$$W_k = \nu N_A \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} N_A kT.$$

Таким образом, полученное выражение определяет внутреннюю энергию произвольного количества идеального газа. С учетом (8.10) это соотношение можно переписать таким образом:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT. \quad (10.4)$$

Итак, внутренняя энергия заданного числа молей идеального газа — однозначная функция его температуры. Она зависит только от состояния идеального газа и не зависит от того, каким образом газ

пришел в данное состояние. Изменение внутренней энергии данной массы идеального газа в произвольном процессе

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad (10.5)$$

С учетом уравнения Клапейрона—Менделеева (8.9) выражение (10.4) можно записать следующим образом: $U = \frac{i}{2} pV$. Соответственно, изменение внутренней энергии (10.5) может быть найдено как $\Delta U = \frac{i}{2} \Delta(pV) = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$.

Работа идеального газа. При расширении или сжатии газа, заключенного в сосуд с подвижным невесомым поршнем площадью S , можно определить работу, совершаемую внешними силами по изменению объема газа. Если при действии внешних сил на поршень он совершает перемещение dx , то элементарная работа внешних сил будет равна $\delta A' = F dx$, где F — проекция суммарного вектора внешних сил на перемещение поршня. Если рассматривать равновесный процесс изменения объема газа, то в каждый момент силы давления газа уравниваются внешними силами, а давление газа равно внешнему давлению. Тогда газ совершает элементарную работу

$$\delta A = p S dx = p dV,$$

где dV — изменение объема газа. Если изобразить процесс изменения объема газа на диаграмме (p, V) , то элементарная работа газа численно определяется площадью под бесконечно малым участком этого графика (рис. 10.1). В целом же работа идеального газа в произвольном процессе будет численно равна площади под графиком этого процесса на диаграмме (p, V) :

$$A_{12} = \int_1^2 p dV. \quad (10.6)$$

Работа будет положительной (и площадь под графиком необходимо взять со знаком «+»), если газ увеличивает свой объем. Работа

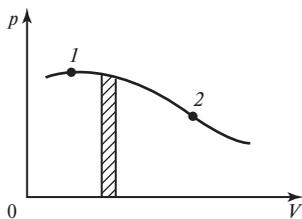


Рис. 10.1

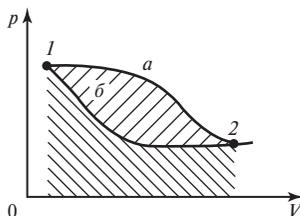


Рис. 10.2

газа против внешних сил будет отрицательна (и площадь под графиком необходимо взять со знаком «-»), если газ уменьшает свой объем. Так, из рис. 10.2 видно, что $A_{1a2} > 0$, а $A_{2b1} < 0$. Кроме того, $A_{1a2} > |A_{2b1}|$. Таким образом, работа идеального газа зависит не только от начального и конечного состояния газа, но и существенно зависит от вида процесса перевода газа из одного состояния в другое.

Количество теплоты. В соответствии с первым началом термодинамики количество теплоты, подведенное к газу, определяется суммой изменения внутренней энергии газа и совершенной им работы. Поскольку работа газа зависит от вида процесса, совершаемого газом, то и количество теплоты тоже зависит от способа изменения состояния газа. Для определения количества теплоты, подведенного к идеальному газу в произвольном процессе (или отведенного от него), можно воспользоваться уравнением (10.2). Однако часто бывает удобно рассчитать необходимую величину непосредственно, не прибегая к расчету работы и изменения внутренней энергии. С этой целью введем понятие теплоемкости. ***Теплоемкость тела (системы) численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу (системе), чтобы изменить его температуру на 1 К в данном процессе: $c = \delta Q / dT$.***

Чтобы сравнивать между собой поведение различного числа молекул одного и того же вещества, удобно ввести понятие ***удельной теплоемкости вещества***. Она численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить единице массы тела (системы), чтобы изменить ее температуру на 1 К:

$$c_{\text{уд}} = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}.$$

Удельная теплоемкость вещества также зависит от вида процесса изменения состояния системы. Для газов очень удобно применять понятие ***молярной теплоемкости***, которая определяется количеством теплоты, необходимым для изменения температуры 1 моля газа на 1 К:

$$c_m = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT}. \quad (10.7)$$

Рассчитаем молярные теплоемкости идеального газа в изопроцессах. Для этого запишем уравнение первого начала термодинамики для 1 моля: $c_m dT = \frac{i}{2} R dT + p dV$.

В изохорном процессе объем газа не изменяется, поэтому $p dV = 0$ и $\delta Q = dU$. Получаем выражение для молярной теплоемкости идеального газа в изохорном процессе, которую обозначим c_V :

$$c_V = \frac{i}{2} R. \quad (10.8)$$

Тогда внутренняя энергия идеального газа может быть также определена по формуле

$$U = \frac{m}{\mu} c_V T. \quad (10.9)$$

В изобарном процессе изменения объема газ совершает работу и тогда выражение для молярной теплоемкости идеального газа в изобарном процессе, которую обозначим c_p , приобретает вид:

$$c_p = \frac{i}{2} R + p \frac{dV}{dT}.$$

Воспользуемся теперь уравнением Менделеева—Клапейрона для 1 моля газа (8.8), выразив элементарную работу газа в изобарном процессе как $p dV = R dT$. Тогда

$$c_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (10.10)$$

Нетрудно видеть, что соблюдается соотношение

$$c_p = c_V + R, \quad (10.11)$$

которое было впервые получено Р. Майером в 1842 г. и поэтому называется *уравнением Майера*.

В изотермическом процессе газ не изменяет свою температуру, поэтому $dT = 0$. Однако газ расширяется, следовательно, он совершает работу: $\delta A \neq 0$. Тогда молярная теплоемкость идеального газа в изотермическом процессе

$$c_T = \frac{i}{2} R + p \frac{dV}{dT} = \pm \infty.$$

Во всех рассмотренных изопроцессах молярные теплоемкости идеального газа постоянны и зависят только от внутреннего строения его молекул. *Процесс, в котором теплоемкость вещества не изменяется, называется политропным*. Получим уравнение такого процесса для идеального газа. Используем выражение первого начала термодинамики:

$$c_m \nu dT = \frac{i}{2} \nu R dT + p dV,$$

где $\nu = m/\mu$.

Из уравнения (8.9) следует, что $p dV + V dp = \nu R dT$. Тогда

$$c_m \frac{p dV + V dp}{R} = c_V \frac{p dV + V dp}{R} + p dV,$$

или

$$p dV(c_m - c_V - R) = V dp(c_V - c_m).$$

Воспользуемся (10.11) и последнее выражение перепишем в виде

$$p dV(c_m - c_p) = V dp(c_V - c_m).$$

Полученное дифференциальное уравнение можно решить методом разделения переменных:

$$\frac{dV}{V} \frac{c_m - c_p}{c_V - c_m} = \frac{dp}{p}.$$

Обозначим

$$n = \frac{c_m - c_p}{c_m - c_V}, \quad (10.12)$$

тогда

$$n \ln V = - \ln p + \text{const},$$

или

$$pV^n = \text{const}. \quad (10.13)$$

Полученное соотношение является уравнением политропного процесса, в котором теплоемкость газа остается постоянной величиной. Показатель n , определяемый по (10.12), называется **показателем политропы** для данного газа. Если из (10.12) выразить молярную теплоемкость газа c_m в политропном процессе, то найдем:

$$c_m = c_V \frac{n - (c_p/c_V)}{n - 1} = c_V \frac{n - \gamma}{n - 1}, \quad (10.14)$$

где

$$\gamma = c_p/c_V. \quad (10.15)$$

Формальная зависимость теплоемкости газа в политропном процессе от показателя политропы изображен на рис. 10.3. Нетрудно видеть, что при $n = 0$ из уравнения (10.13) следует $pV^n = pV^0 = p = \text{const}$, т.е. уравнение изобарного процесса. В соответствии с (10.14), $c_m = c_p$. При $n = 1$ из уравнения (10.13) получаем $pV^n = pV^1 = pV = \text{const}$, т.е. уравнение изотермического процесса. В этом случае, в соответствии с (10.14), $c_m \rightarrow \pm\infty$. При $n = \pm\infty$ из уравнения (10.13), извлекая корень n -й степени, можно получить $\sqrt[n]{p} V = V = \text{const}$, т.е. уравнение изо-

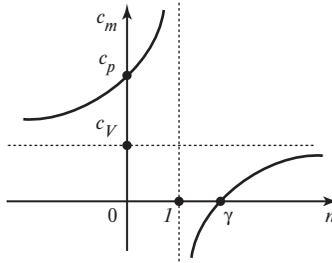


Рис. 10.3

хорного процесса. Согласно (10.14), $c_m = c_V$. Следовательно, все изо-процессы идеального газа — частные случаи политропного процесса.

Кроме известных изопроецессов можно ввести понятие адиабатического процесса. **Адиабатическим (или адиабатным) процессом** называют процесс, который проходит без теплообмена с окружающей средой ($\delta Q = 0$). Тогда в этом процессе $c_m = 0$, и из (10.14) можно получить, что это возможно при $n = \gamma$. Уравнение адиабатного процесса имеет вид: $pV^\gamma = \text{const}$. Это уравнение впервые было получено французским математиком и механиком С. Пуассоном и поэтому называется **уравнением Пуассона**. Показатель степени в этом уравнении называется **показателем Пуассона для идеального газа**. Нетрудно увидеть, что, согласно (10.8) и (10.10), из (10.15) следует

$$\gamma = c_p / c_V = (i + 2) / i. \quad (10.16)$$

10.4. Анализ изопроецессов идеального газа с помощью первого начала термодинамики

Рассмотрим описание различных изопроецессов идеального газа с помощью первого начала термодинамики.

Изохорный процесс. Поскольку в этом процессе $V = \text{const}$, то газ не совершает никакой работы над внешними телами: $A_V = 0$. В соответствии с первым началом термодинамики $Q_V = \Delta U$. Используя уравнение Клапейрона — Менделеева, можно выразить изменение внутренней энергии идеального газа следующим образом:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} V \Delta p.$$

Подводимое к газу количество теплоты можно рассчитать, используя (10.8) так:

$$Q_V = \frac{m}{\mu} c_V \Delta T.$$

Изобарный процесс. В данном процессе происходит изменение объема газа, поэтому он совершает работу над внешними силами.

Поскольку $p = \text{const}$ то, согласно (10.6), $A_p = p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T$. Из этого выражения следует физический смысл универсальной газовой постоянной: она численно равна работе изобарного расширения 1 моля идеального газа при повышении его температуры на 1 К. Уравнение первого начала термодинамики для изобарного процесса запишем следующим образом: $\delta Q_p = dU + \delta A_p$, или $Q_p = \Delta U + A_p$. Используя уравнение Клапейрона—Менделеева, выражаем изменение внутренней энергии идеального газа следующим образом:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{i}{2} p\Delta V.$$

Подводимое к газу количество теплоты определяется с помощью (10.10) так:

$$Q_p = \frac{m}{\mu} c_p \Delta T.$$

Изотермический процесс. Поскольку в этом процессе $T = \text{const}$, то внутренняя энергия идеального газа не изменяется: $\Delta U = 0$. Уравнение первого начала термодинамики для такого процесса запишем в виде $\delta Q_T = \delta A_T$, или $Q_T = A_T$. Следовательно, при подведении к газу теплоты ($Q_T > 0$), он расширяется, совершая положительную работу против внешних сил ($A > 0$). Получим выражение для расчета работы газа в изотермическом процессе, проинтегрировав (10.6):

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} \, dV = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Поскольку в данном процессе теплоемкость бесконечна, то для расчета подведенного к газу количества теплоты можно использовать лишь выражение первого начала термодинамики. Основной вывод при анализе превращения энергии в изотермическом процессе: получаемая от внешней среды теплота идет не на увеличение температуры газа, а возвращается обратно в среду в виде механической работы.

Адиабатный процесс. В таком процессе газ не получает теплоты из внешней среды: $\delta Q_{\text{ад}} = 0$, поэтому $0 = dU + \delta A_{\text{ад}}$. Поэтому при расширении газа, когда он совершает положительную работу против внешних сил ($A > 0$), изменение внутренней энергии газа отрицательно ($\Delta U < 0$). Следовательно, согласно (10.5), температура газа

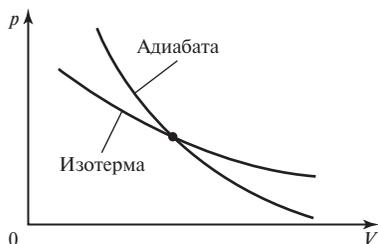


Рис. 10.4

уменьшается. Поэтому на диаграмме (p, V) кривая адиабатического расширения газа (адиабата) будет располагаться ниже кривой изотермического расширения (изотермы), проведенной из той же начальной точки (рис. 10.4). Таким образом, адиабата на диаграмме (p, V) проходит круче, чем изотерма. В соответствии с (10.7) $c_{\text{ад}} = 0$, а поэтому расчет совершенной газом работы можно провести в соответствии с первым началом термодинамики: $A_{\text{ад}} = -\Delta U$. Однако можно получить выражение для расчета работы в адиабатном процессе и с помощью соотношения (10.6). Для этого воспользуемся уравнением Пуассона $pV^\gamma = p_1V_1^\gamma = \text{const}$. Тогда

$$A_{\text{ад}} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} \, dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} \left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma} \right].$$

Поскольку $\gamma > 1$, то последнее выражение удобно переписать в виде

$$A_{\text{ад}} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \left[V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Отметим, что в соответствии с (10.16) показатель адиабаты может принимать следующие значения:

$$\gamma = 5/3 \approx 1,67 \quad \text{для одноатомного газа } (i = 3);$$

$$\gamma = 7/5 = 1,4 \quad \text{для двухатомного газа } (i = 5);$$

$$\gamma = 4/3 \approx 1,33 \quad \text{для трехатомного газа } (i = 6).$$

Реальный адиабатный процесс должен происходить, с одной стороны, достаточно быстро, чтобы в системе не успел произойти теплообмен с окружающей средой, но, с другой стороны, достаточно медленно, чтобы процесс оставался равновесным.

10.5. Ограниченность молекулярно-кинетической теории теплоемкости идеального газа

Молекулярно-кинетическая теория теплоемкости идеального газа позволила получить выражение, например, для молярной теплоемкости газа в изохорном процессе (10.8). Однако экспериментальное подтверждение этой формулы наталкивается на ряд трудностей. Несмотря на то что целый ряд газов при определенных условиях ведут себя как идеальный газ (т.е. подчиняются уравнению состояния идеального газа), хорошее согласие во всем интервале температур у формулы (10.8) с экспериментом получается только для одноатомных газов. Для других газов эта формула экспериментально подтверждается только в ограниченном интервале температур. Например, значения молярной теплоемкости азота при постоянном объеме при различных температурах приведены ниже:

$T, \text{ К}$	80	150	250	400	600	1000	1500
$c_V, \text{ Дж / (моль} \cdot \text{ К)}$	20,31	21,03	20,87	20,95	21,79	24,39	26,52

Теоретическое же значение молярной теплоемкости азота при постоянном объеме, согласно (10.8), равно 20,8 Дж / (моль · К).

Закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул справедлив только в диапазоне $273 < T < 723 \text{ К}$. Происходит это из-за того, что молекулярно-кинетическая теория не учитывает квантовый характер движения молекул и атомов в молекулах. При низких температурах у молекулы возбуждаются только степени свободы поступательного движения. На вращательные степени свободы приходится слишком малая энергия, ими пренебрегают. В этих условиях газ ведет себя как одноатомный. С ростом температуры начинают возбуждаться вращательные степени свободы, а затем — колебательные. Молекула перестает быть жесткой, расстояния между атомами в молекуле начинают меняться. Поскольку механическим колебаниям гармонического осциллятора присуща кинетическая и потенциальная энергия, то на колебательную степень свободы приходится энергия $\varepsilon = 2 \cdot \frac{1}{2} kT$. Это и приводит к заниженным значениям теплоемкости идеального газа, получаемым согласно классической теории теплоемкости, по сравнению с результатами эксперимента.

10.6. Невозможность вечного двигателя первого рода

Рассмотрим произвольный замкнутый процесс, совершаемый идеальным газом. **Циклом** называется процесс изменения состояния системы, в результате которого она возвращается в исходное состояние. На рис. 10.5 изображен такой цикл — процесс $1-a-2-b-1$. Для отдельных этапов цикла можно записать выражение первого начала термодинамики следующим образом: $Q_{1a2} = A_{1a2} + \Delta U_{1a2}$, $Q_{2b1} = A_{2b1} + \Delta U_{2b1}$. Если просуммировать почленно эти уравнения, то получим $Q_{\text{ц}} = A_{\text{ц}}$. Поскольку внутренняя энергия является функцией состояния, то ее суммарное изменение за цикл равно 0.

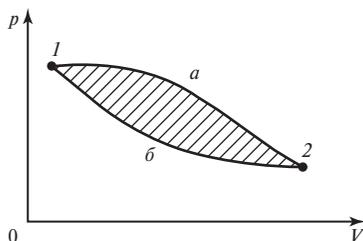


Рис. 10.5

Из такого рассмотрения следует вывод: для получения работы газа в замкнутом цикле необходимо подведение теплоты к газу от внешней среды. При этом площадь цикла (заштрихованная на рис. 10.5) численно равна работе газа за цикл. Если цикл на диаграмме (p, V) совершается по часовой стрелке, то работа газа за цикл положительна. Если цикл на диаграмме (p, V) совершается против часовой стрелки, то работа газа за цикл отрицательна и равна площади цикла, взятой со знаком «-».

Обобщая все сказанное, можно сформулировать первое начало термодинамики применительно к циклам следующим образом: *невозможно создать такое циклически действующее устройство, которое производило бы полезную (положительную) работу без подвода энергии извне*. Такое устройство исторически было названо **вечным двигателем первого рода**. Следовательно, первое начало термодинамики запрещает создание вечного двигателя первого рода.

Глава 11

ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

В этой главе вновь обратимся к термодинамическому методу изучения физических явлений. Дело в том, что для термодинамических процессов одного первого начала термодинамики недостаточно. Выражая всеобщий закон сохранения и превращения энергии, первое начало не позволяет определить направление протекания процессов. Например, процесс самопроизвольной передачи теплоты от холодного тела к горячему не противоречит первому началу термодинамики, если уменьшение внутренней энергии первого тела равно энергии, полученной вторым телом. Однако опыты показывают, что такой процесс не происходит. Обобщение огромного экспериментального материала привело к необходимости расширения термодинамики. Было сформулировано второе начало термодинамики, позволившее превратить термодинамический метод исследования физических явлений в один из самых универсальных методов, применяемых в физике. Однако, для того чтобы можно было перейти к изучению второго закона термодинамики, необходимо рассмотреть предварительно целый ряд вопросов.

11.1. Обратимые и необратимые процессы и циклы

Введем понятие обратимого процесса. *Термодинамический процесс, совершаемый системой, называется **обратимым**, если он может быть проведен в прямом и обратном направлениях через те же состояния (но в обратной последовательности) так, что после осуществления прямого и обратного процессов в окружающей среде не возникает никаких остаточных изменений.* Процесс, который не удовлетворяет вышеуказанному условию, называется ***необратимым***.

Вот некоторые примеры обратимых процессов:

колебания математического маятника без трения;

равновесный адиабатный процесс (для этого он должен быть бесконечно медленным);

равновесный изотермический процесс (тоже осуществляемый бесконечно медленно).

При гармонических колебаниях маятника в отсутствие сил трения он полностью сохраняет свою энергию, следовательно, не передает

ее окружающим телам. После завершения очередного полного колебания, т.е. по истечению одного полного периода колебаний, маятник в точности возвращается в исходное состояние с теми же значениями координаты, скорости, ускорения, энергии и т.п. Так выполняется условие обратимости процесса.

Любой термодинамический процесс без теплообмена с окружающей средой (адиабатный) также будет обратимым, поскольку в этом случае система обменивается с другими телами только работой, т.е. механическим воздействием.

Если осуществить процесс с теплообменом, удовлетворив требование обратимости процесса, то можно установить, что таким процессом будет только изотермический. Только в таком случае в прямом и обратном процессах будут осуществляться последовательности тех же состояний с одинаковой температурой. Во всех же иных процессах с теплообменом между системой и окружающей средой в прямом и обратном процессах температура состояний будет разная, а поэтому теплота будет постоянно самопроизвольно переходить от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой.

Вот некоторые примеры необратимых процессов:

колебания маятника с трением;

любой неравновесный процесс (осуществляемый достаточно быстро), даже адиабатный.

Колебания маятника с трением, во-первых, не являются строго гармоническими, т.е. положения маятника после каждого полного колебания не совпадают. Таким образом, прямой и обратный процессы не проходят через те же состояния. Кроме того, при трении часть энергии маятника передается во внешнюю среду, непрерывно увеличивая ее внутреннюю энергию. Причем это происходит как при прямом движении маятника, так и при обратном.

При быстром осуществлении любого процесса параметры системы в разных ее точках оказываются разными, что не позволяет провести процесс в прямом и обратном направлениях через те же состояния. Рассмотрим это на примере расширения газа под поршнем в сосуде. Если быстро перемещать поршень, то вблизи него в сосуде создается область разрежения (пониженного давления), поскольку концентрация молекул вблизи поршня будет меньше, чем вдали от него. Состояние газа в сосуде будет неравновесным: давление в разных частях сосуда разное. При быстром перемещении поршня молекулы «не успевают» своим тепловым движением выровнять это падение концентрации, в результате при неравновесном расширении процесс пройдет через точки с меньшим давлением, чем при равновесном сжатии. На рис. 11.1 на диаграмме (p, V) неравновесный процесс расширения газа 2-1 условно показан штриховой линией, так

как изобразить неравновесное состояние однозначной точкой на графике невозможно.

При осуществлении неравновесного сжатия газа под поршнем в сосуде вблизи поршня возникнет область повышенного давления, в результате процесс неравновесного сжатия на диаграмме (p, V) будет изображаться условной линией, находящейся выше равновесного процесса.

Обратимый процесс является обязательно равновесным, поскольку каждое равновесное состояние системы с заданными параметрами состояния может быть только одно, а неравновесных — бесконечно много. Поэтому в прямом и обратном процессах равновесные состояния воспроизводятся однозначно, а неравновесные — неоднозначно. Следовательно, обратный процесс может не пройти через те же состояния, что и прямой, если это — неравновесный процесс.

Обратное высказывание неверно: *равновесный процесс не обязательно должен быть обратимым*. Например, процесс самопроизвольной теплопередачи при конечной разности температур между телами необратим. Если он будет идти медленно, то будет равновесным, но он не может проходить в противоположном направлении: теплота самопроизвольно передается только от тела с более высокой температурой к телу с более низкой температурой.

Рассматривая в дальнейшем циклы, т.е. замкнутые процессы, происходящие с идеальным газом, будем считать цикл *прямым*, если на диаграмме (p, V) он осуществляется в направлении по часовой стрелке, и *обратным*, если против часовой стрелки. Тогда работа газа в прямом цикле будет положительна, а в обратном — отрицательна.

Проведем прямой цикл двумя способами: обратимо, т.е. равновесно (бесконечно медленно), и необратимо, т.е. быстро, а поэтому неравновесно. Учитывая выводы, сделанные при рассмотрении рис. 11.1, изобразим эти циклы на диаграмме (p, V) (рис. 11.2). При этом точки 1 и 2, соответствующие минимальному и максимальному объему газа в циклах, при обратимом и необратимом способах осуществления цикла совпадают. Именно между этими точками и про-

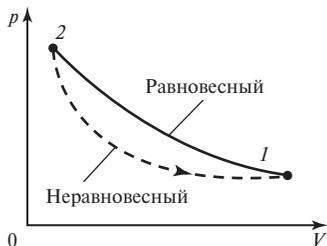


Рис. 11.1

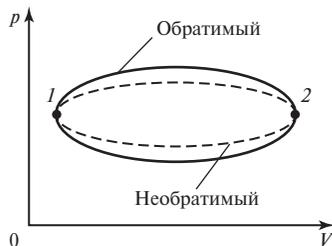


Рис. 11.2

исходят необратимое сжатие и необратимое расширение газа. Из сравнения площадей этих циклов видно, что при обратимом способе осуществления цикла работа цикла больше, чем при необратимом способе: $A_{\text{обр}} > A_{\text{необр}}$. Такой результат, полученный для частного случая сравнения быстрого и медленного способов осуществления цикла, можно представить в виде:

$$A_{\text{обр}} > A_{\text{необр}}. \quad (11.1)$$

Из рассмотренных примеров необратимых процессов можно сделать общие выводы. Все реальные процессы протекают с конечной скоростью и сопровождаются трением и теплообменом при конечной разности температур тел. Следовательно, все реальные процессы, строго говоря, необратимы.

11.2. Тепловая машина и ее термический КПД

Термодинамика рассматривает превращения энергии в системах в процессах их взаимодействия с окружающими телами. Один из видов таких превращений — превращение теплоты, переданной системе, в работу. Для осуществления такого превращения созданы специальные устройства — *тепловые машины*. Известно, что первую тепловую машину разработал и построил русский механик И. Ползунов в 1763 г., но первый патент на такое устройство был выдан Дж. Уатту в 1784 г. С тех пор тепловые машины прочно вошли в сферу жизнедеятельности человека. К ним относятся паровые машины, двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины и реактивные двигатели. Любое стрелковое и артиллерийское оружие — тоже тепловая машина.

По типу действия все тепловые машины можно разделить на машины разового действия и циклические. При этом принцип их устройства и функционирования одинаков. На рис. 11.3 изображено принципиальное устройство произвольной тепловой машины. Цель действия тепловой машины — получение работы A , которую над внешними телами будет совершать рабочее тело. Это может быть газ, находящийся в сосуде с подвижным поршнем, и т.п. Для совершения

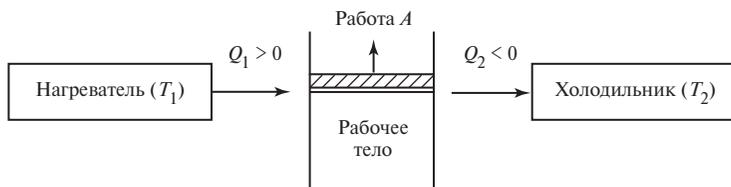


Рис. 11.3

рабочим телом работы ему передается некоторое количество теплоты Q_1 от устройства, называемого нагревателем. Для постоянного (циклического) совершения работы рабочим телом необходимо привести рабочее тело в исходное состояние, после чего оно вновь сможет получить количество теплоты Q_1 от нагревателя. Возврат рабочего тела в исходное состояние (сжатие газа после его расширения) возможен при отведении от рабочего тела некоторого количества теплоты Q_2 устройству, называемому холодильником. Очевидно, что температуры нагревателя T_1 и холодильника T_2 должны быть разными: $T_1 > T_2$. Мерой эффективности преобразования теплоты, подведенной к рабочему телу, в работу тепловой машины над внешними телами является *коэффициент полезного действия (КПД)* тепловой машины, который равен отношению работы, совершенной рабочим телом за один цикл, к количеству теплоты, полученному рабочим телом от нагревателя в этом цикле:

$$\eta = A_{\text{ц}} / Q_1. \quad (11.2)$$

Поскольку $Q_1 > 0$, а $Q_2 < 0$, то, применяя первое начало термодинамики к циклу рабочего тела (см. § 10.2), можно записать: $A_{\text{ц}} = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|$. Тогда выражение (11.2) будет справедливо и в таком виде:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \quad (11.3)$$

Из (11.3) следует, что КПД любой тепловой машины всегда меньше 100 %, т.е. нельзя в циклическом процессе полностью превратить в работу всю теплоту, полученную рабочим телом от нагревателя. Однако понятно, что если процессы теплообмена рабочего тела с нагревателем и холодильником сделать обратимыми, то КПД такой тепловой машины всегда будет выше, чем если бы эти процессы были необратимыми (11.1).

11.3. Цикл Карно

В 1824 г. французский инженер Н.Л.С. Карно (1796—1832) в своей работе «Рассуждения о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу» предложил рассмотреть цикл тепловой машины, составленный только из обратимых процессов. У такой машины КПД должен быть больше, чем КПД любой другой машины, цикл которой состоит из необратимых процессов.

Если для подвода теплоты к рабочему телу необходимо совершить теплообмен с нагревателем, а теплообмен обратим только при

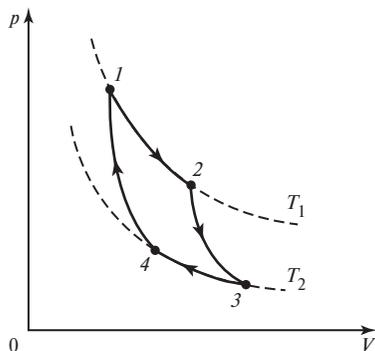


Рис. 11.4

равенстве температур рабочего тела и нагревателя, то осуществим тепловой контакт рабочего тела с нагревателем в изотермическом процессе. Это первый процесс цикла (на рис. 11.4 кривая 1-2 — изотерма), проходящий при температуре нагревателя T_1 . Чтобы потом обратимо осуществить передачу теплоты холодильнику, т.е. изотермический процесс 3-4 при температуре холодильника T_2 , необходимо перевести рабочее тело с одной изотермы на другую. Единственным обратимым процессом при этом может быть равновесный адиабатный процесс. На диаграмме (p, V) он изображен кривой 2-3. Аналогичный процесс адиабатного сжатия 4-1 понадобится для возвращения рабочего тела в исходное состояние. Получаемый цикл из четырех процессов носит название **цикла Карно**. Он является единственно возможным обратимым циклом рабочего тела при одном нагревателе и одном холодильнике в тепловой машине. Поэтому, в соответствии с выводами § 11.1, *КПД цикла Карно будет максимальным среди КПД всех возможных циклов, которые рабочее тело может осуществить между нагревателем и холодильником с заданными температурами T_1 и T_2* . В этом состоит содержание **теоремы Карно**.

Рассчитаем КПД цикла Карно η_k . Согласно (11.2),

$$\eta_k = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}. \quad (11.4)$$

Поскольку теплота от нагревателя передается в изотермическом процессе 1-2, то

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (11.5)$$

Аналогично, теплоту, передаваемую холодильнику в изотермическом процессе 3-4, определим по формуле

$$Q_2 = A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (11.6)$$

Подставляя (11.5) и (11.6) в (11.4), получаем:

$$\eta_{\text{к}} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (11.7)$$

Воспользуемся уравнением Пуассона для связи параметров рабочего тела. Точки 2 и 3 лежат на одной адиабате, поэтому

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma. \text{ Кроме того, согласно уравнению состояния, } \frac{p_2 V_2}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_2}. \text{ Из первого соотношения следует, что } \frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma, \text{ а из вто-}$$

рого соотношения получим $\frac{p_2}{p_3} = \frac{V_3}{V_2} \frac{T_1}{T_2}$. Приравняем правые части полученных выражений:

$$\frac{V_3}{V_2} \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma,$$

откуда следует, что

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (11.8)$$

Аналогично для адиабаты 4-1 можно получить, что

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (11.9)$$

Поделим (11.8) на (11.9), тогда

$$V_2/V_1 = V_3/V_4. \quad (11.10)$$

Подставив (11.10) в (11.7), найдем

$$\eta_{\text{к}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (11.11)$$

В соответствии с теоремой Карно, эта формула определяет теоретический предел КПД всех возможных тепловых машин с нагревателем, имеющим температуру T_1 , и холодильником, имеющим температуру T_2 . Соответственно тепловая машина, работающая по циклу Карно, называется идеальной тепловой машиной.

11.4. Второе начало термодинамики. Энтропия

Первый закон термодинамики не позволяет установить направление протекания процессов. Он также не исключает возможности такого процесса, *единственным* результатом которого было бы превращение теплоты, полученной от некоторого тела, в эквивалентную ей работу. Первое начало термодинамики допускает также построение циклически действующей тепловой машины, совершающей работу за счет охлаждения одного источника теплоты. Такой двигатель называется *вечным двигателем второго рода*. Например, понижение температуры мирового океана на $0,01$ °C и превращение полученной теплоты в работу обеспечивает человечество энергией на 1700 лет при нынешних темпах энергопотребления!

Обобщение большого числа экспериментальных фактов привело к выводу о невозможности построения вечного двигателя второго рода и получило название *второго закона (второго начала) термодинамики*. Существует несколько эквивалентных одна другой формулировок второго начала термодинамики. Сначала приведем две из них, принадлежащих немецкому физика Р. Клаузиусу (1850 г.) и английскому физика У. Томсону (он же лорд Кельвин, 1851 г.):

- невозможен процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от холодного тела к горячему;
- невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счет охлаждения одного тела.

Сравним два способа расчета КПД цикла Карно, т.е. приравняем соотношения (11.4) и (11.11):

$$1 - T_2/T_1 = 1 + Q_2/Q_1.$$

Тогда получим, что $Q_2/Q_1 = -T_2/T_1$, или $Q_2/T_2 = -Q_1/T_1$.

Назовем отношение количества теплоты, полученного системой в каком-либо процессе, к температуре этого процесса *приведенной теплотой*. Для цикла Карно Q_1/T_1 — приведенная теплота, полученная рабочим телом в процессе нагревания при температуре T_1 , а Q_2/T_2 — приведенная теплота, полученная рабочим телом в процессе теплообмена при температуре T_2 (поскольку $Q_2 < 0$, то это

количество теплоты на самом деле передается от рабочего тела). Если переписать последнее соотношение в виде

$$Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0, \quad (11.12)$$

то его можно сформулировать следующим образом: в равновесном обратимом цикле Карно суммарная приведенная теплота всех процессов равна 0.

Рассмотрим произвольный обратимый цикл $A-B-A$ (рис. 11.5). Разобьем этот цикл изотермами и адиабатами так, чтобы исходный цикл превратился в последовательность элементарных циклов Карно $1-2-3-4$. Естественно, что чем ближе адиабаты $2-3$ и $4-1$ будут находиться одна к другой, тем точнее получится приближение последовательности циклов Карно к исходному циклу. Тогда можно сказать, что для осуществления исходного цикла потребуется множество нагревателей и холодильников. Для каждого из элементарных циклов Карно будет справедливо соотношение (11.12) в виде

$$\delta Q_{1i}/T_{1i} + \delta Q_{2i}/T_{2i} = 0.$$

Если же просуммировать все эти выражения по исходному циклу, то получим

$$\oint \delta Q/T = 0.$$

Математически это означает, что выражение $\delta Q/T$ есть полный дифференциал некоторой функции S :

$$dS = \delta Q/T. \quad (11.13)$$

Такую функцию ввел и дал ей название *энтропия* (по-гречески «превращение») Р. Клаузиус в 1865 г.: это такая функция состояния термодинамической системы, дифференциал которой связан с элементарным тепловым эффектом в обратимом процессе соотношением (11.13).

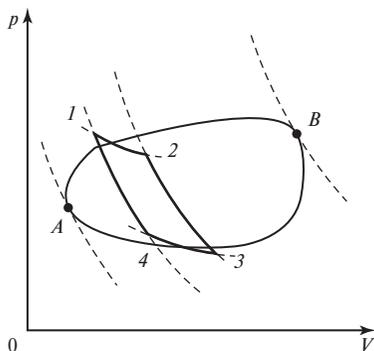


Рис. 11.5

Выведем расчетную формулу для измерения энтропии в обратимом процессе идеального газа. Подставим выражение (11.13) в (10.3) и учтем (10.6):

$$T dS = dU + \delta A = dU + p dV.$$

Тогда, в соответствии с (8.9) и (10.5), получим:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V},$$

или после интегрирования для некоторого процесса 1-2

$$\Delta S = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (11.14)$$

Ясно, что если процесс круговой (цикл), то состояния 1 и 2 совпадают, т.е. $T_1 = T_2$ и $V_1 = V_2$, а тогда

$$\Delta S_{\text{ц}} = 0. \quad (11.15)$$

11.5. Основные свойства энтропии

1. Обратимый процесс. Рассмотрим цикл Карно как пример обратимого процесса, в котором участвуют три тела: нагреватель, рабочее тело и холодильник. Поскольку рабочее тело совершает замкнутый цикл, то для него справедливо (11.15), т.е. энтропия рабочего тела не изменяется. Следовательно, если Q_1/T_1 — это изменение энтропии в процессе теплообмена с нагревателем, то, согласно закону сохранения энергии, изменение энтропии нагревателя в этом процессе определится как $-Q_1/T_1$. Аналогичный вывод можно сделать и для второго слагаемого в (11.12). Тогда выражение (11.12) можно рассматривать и таким образом:

$$\Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{хол}} = 0.$$

Обобщая все выводы для рабочего тела, нагревателя и холодильника, получаем

$$\Delta S_{\text{сист}} = 0. \quad (11.16)$$

Таким образом, алгебраическая сумма изменений энтропии всех тел, участвующих в обратимом процессе, равна 0.

2. Необратимый процесс. Рассмотрим в качестве примера необратимого процесса передачу теплоты от одного (более горячего) тела, температура которого T_1 , к другому (более холодному) телу, температура которого T_2 . Второе начало термодинамики утверждает, что про-

цесс возможен только в одном направлении: одно тело отдает количество теплоты Q_1 , а другое получает количество теплоты Q_2 .

Направление процесса передачи теплоты учитывается в знаке этих величин: $Q_1 < 0$, а $Q_2 > 0$. Согласно закону сохранения энергии выполняется равенство $Q_1 = -Q_2$. Рассмотрим промежуточный этап передачи столь малого количества теплоты, что температуры тел не изменяются. Изменения энтропии каждого из тел рассчитаем следующим образом: $\Delta S_1 = Q_1 / T_1$, $\Delta S_2 = Q_2 / T_2$. Тогда общее изменение энтропии системы из двух тел можно найти по формуле

$$\Delta S_{\text{сист}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = Q_1 / T_1 + Q_2 / T_2.$$

Учитывая, что $T_1 > T_2$, $Q_1 < 0$, а $Q_2 > 0$, получаем:

$$\Delta S_{\text{сист}} > 0. \quad (11.17)$$

Таким образом, алгебраическая сумма изменений энтропии всех тел, участвующих в необратимом процессе, больше 0.

Объединяя выводы (11.16) и (11.17), получаем, что для всех тел изолированной системы, участвующих в произвольном процессе, суммарное изменение энтропии неотрицательно:

$$\Delta S_{\text{сист}} \geq 0. \quad (11.18)$$

Этот вывод можно сформулировать несколько иначе: *процессы в природе всегда идут в таком направлении, чтобы для всех тел, участвующих в процессе, алгебраическая сумма изменений энтропии была неотрицательна*. Это правило, указывающее направление протекания любых процессов, также является формулировкой **второго начала термодинамики**.

Реальные процессы, происходящие в природе, всегда необратимы. Значит, энтропия системы в этих процессах должна возрастать. Рост энтропии продолжается до тех пор, пока в системе не наступит состояние равновесия, после чего все процессы в системе прекращаются. Другой вид приведенной формулировки может звучать и таким образом: не может самопроизвольно происходить процесс с уменьшением энтропии системы.

Распространение второго начала термодинамики, установленного для замкнутых систем, на всю Вселенную неправомерно. Такая экстраполяция может привести к выводу о неизбежности выравнивания температуры всех тел, к идее «тепловой смерти Вселенной» (ее выдвинул Р. Клаузиус). Согласно гипотезе Л. Больцмана, Вселенная все время пребывает в равновесном изотермическом состоянии,

но в ее различных частях происходят отклонения от этого состояния. Оказалось, что вследствие тяготения однородное изотермическое распределение вещества во Вселенной не соответствует максимуму энтропии, потому что не является наиболее вероятным. Поскольку Вселенная нестационарна, она расширяется и первоначально однородное вещество распадается под действием сил тяготения на галактики, звезды, планеты и т.д. Именно эти процессы и происходят с ростом энтропии, что полностью соответствует второму началу термодинамики. Эти процессы и позволят избежать «тепловой смерти Вселенной».

11.6. Статистический смысл второго начала термодинамики

До сих пор мы использовали термодинамический метод исследования и не интересовались внутренним строением изучаемых систем. Однако существует связь второго начала термодинамики с молекулярно-кинетической теорией строения вещества. Рассмотрим это на примере состояния системы молекул газа.

Каждому состоянию газа соответствует некоторое распределение его молекул по объему и определенное распределение молекул по скоростям. Предположим, что в сосуде находятся только две молекулы газа (рис. 11.6). «Цвет» молекул пусть будет соответствовать их скорости. Различные состояния газа различаются только распределением молекул по половинкам сосуда. Можно получить четыре различных распределения молекул. Вероятность каждого из них равна 0,25. Однако эта вероятность будет отличаться от вероятности термодинамического состояния системы. Дело в том, что в однородном газе все молекулы тождественны одна другой, т.е. они неразличимы. Поэтому два из четырех распределений будут тождественны одному другому и определяют одно из трех возможных состояний. Следовательно, вероятность состояния

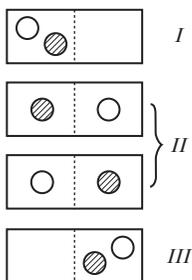


Рис. 11.6

P равна 0,5.

В целом же вероятность какого-либо состояния системы W больше вероятности w отдельного распределения в P раз:

$$W = wP, \quad (11.19)$$

где P — *термодинамическая вероятность состояния системы*. Она равна числу всевозможных микрораспределений частиц по координатам и скоростям, соответствующих данному

термодинамическому состоянию (макросостоянию). Необходимо учесть, что $W \leq 1$, $w \leq 1$, но $P \geq 1$. В нашем примере $P_I = 1$, $P_{II} = 2$, $P_{III} = 1$.

Л. Больцман доказал, что между энтропией системы и термодинамической вероятностью ее состояния существует связь:

$$S = k \ln P, \quad (11.20)$$

где k — постоянная Больцмана. Эта формула позволяет дать статистическое толкование второго закона термодинамики, утверждающего, что энтропия изолированной системы не убывает: термодинамическая вероятность состояния изолированной системы во всех происходящих в ней процессах не может убывать.

Таким образом, второй закон термодинамики является статистическим законом. Он выражает необходимые закономерности хаотического движения большого числа частиц, входящих в состав изолированной системы.

Глава 12

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

В § 8.2 было введено понятие *равновесного состояния термодинамической системы*. Одно из условий такого состояния — отсутствие в системе потоков вещества и энергии. Однако беспорядочное тепловое движение молекул газа и столкновения между ними приводят к постоянному перемешиванию частиц и изменению их скоростей и энергий. Например, если в системе существует неоднородное распределение плотности или температуры, то происходит самопроизвольное выравнивание этих неоднородностей. Следовательно, при нарушении равновесного состояния системы она возвращается в это состояние. Поведение системы при этом можно описать, рассмотрев потоки массы, импульса, энергии и т.п. Подобные явления, происходящие при нарушении равновесного состояния систем, называются *явлениями переноса*. Рассмотрим некоторые из них.

12.1. Столкновения молекул

Наличие сил взаимодействия (отталкивания и притяжения) между молекулами приводит к появлению потенциальной энергии их взаимодействия. График зависимости потенциальной энергии от расстояния между молекулами приведен на рис. 12.1. Существование вещества в том или ином агрегатном состоянии при определенной температуре T можно объяснить, сравнив глубину «потенциальной ямы» $|U_0|$ и среднюю энергию хаотичного движения молекул, которая пропорциональна kT .

При выполнении неравенства $|U_0| \gg kT$, т.е. при низких температурах вещества, молекулы располагаются близко одна от другой в строгом порядке. В этом случае тепловое движение молекул — это просто малые колебания молекул относительно положения равновесия. Вещество находится в твердом агрегатном состоянии. При $|U_0| \approx kT$ молекулы вещества непрерывно перемещаются по всему его объему, однако расстояния между ними не превышают r_0 . Вещество находится в жидком агрегатном состоянии. При $|U_0| \ll kT$ в веществе наблюдается интенсивное хаотичное тепловое движение молекул. Молекулы удалены на значительные расстояния. Вещество находится в газообразном состоянии, а его молекулы непрерывно

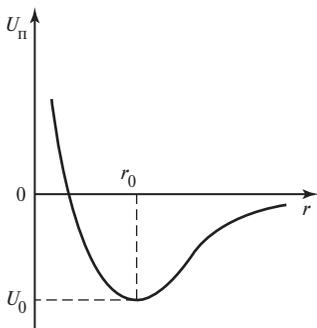


Рис. 12.1

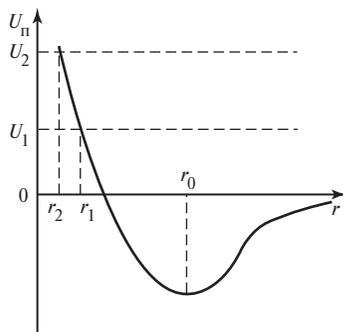


Рис. 12.2

хаотично движутся и постоянно сталкиваются. Однако следует иметь в виду, что непосредственного «контакта» молекул при столкновениях не происходит. Объясняется это существенным увеличением сил отталкивания молекул при их сближении. Поэтому **столкновением молекул** будем называть такое их взаимодействие, при котором изменяются направления их движения. Процесс столкновения молекул тоже можно рассмотреть с помощью потенциальной кривой.

На график $U_{\text{п}}(r)$ (рис. 12.2) нанесены значения полной энергии системы двух молекул U . Поскольку силы взаимодействия молекул потенциальны, то, согласно закону сохранения механической энергии, $U = \text{const}$. Рассмотрим сближение молекулы 2 из положения $r = \infty$ с молекулой 1, неподвижно находящейся в положении $r = 0$.

Поскольку $U_{\text{п}}(\infty) = 0$, то кинетическая энергия молекулы 2 на большом удалении молекул одной от другой равна полной энергии: $U_{\text{к}}(\infty) = U$. По мере сближения молекул кинетическая энергия молекулы 2 растет, а $U_{\text{п}}(r)$ падает. При расстоянии между молекулами $r = r_0$ энергия $U_{\text{к}}$ достигает максимального значения. За счет запаса этой энергии молекула 2 «пролетает» положение $r = r_0$ и попадает в зону преобладания действия сил отталкивания молекул. Следовательно, при дальнейшем сближении молекул ($r < r_0$) кинетическая энергия молекулы 2 падает, а потенциальная энергия $U_{\text{п}}(r)$ растет.

В точке $r = r_1$ полная энергия системы равна потенциальной: $U_1 = U_{\text{п}}(r_1)$. В этом положении $U_{\text{к}}(r_1) = 0$. Именно это положение и соответствует наибольшему сближению молекул. Поскольку при увеличении температуры системы значение U возрастает ($U_2 > U_1$), то расстояние наибольшего сближения молекул становится меньше ($r_2 < r_1$). Как оценить расстояние наибольшего сближения молекул?

Назовем **эффективным диаметром молекулы** среднее расстояние между центрами молекул, на которое две молекулы сближаются при их столкновении (рис. 12.3). О необходимости введения такой величины говорилось в § 8.5. Площадь поперечного сечения «коридора», в который должны попасть центры соседних молекул, чтобы столкнуться с данной, называется эффективным сечением столкновения:

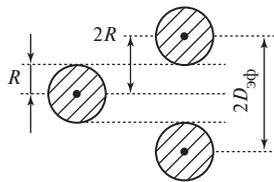


Рис. 12.3

$$S_{\text{эф}} = \pi D_{\text{эф}}^2 = 4\pi R^2. \quad (12.1)$$

Рассчитаем число столкновений молекул за единицу времени. Пусть одна молекула в сосуде движется со скоростью $\langle v \rangle$, а остальные неподвижны. Тогда исследуемая молекула за 1 с испытает соударения со всеми частицами, находящимися в цилиндре длиной $\langle v \rangle \cdot 1$ с и основанием $S_{\text{эф}}$ (рис. 12.3). Число таких молекул, а значит, и число столкновений будет равно:

$$N = n \langle v \rangle S_{\text{эф}}.$$

Поскольку все столкновения произошли за 1 с, то промежутки времени между столкновениями равны

$$\tau = \frac{1}{N} = \frac{1}{n \langle v \rangle S_{\text{эф}}}.$$

Назовем **средней длиной свободного пробега** молекулы расстояние, которое она пролетает между двумя последовательными соударениями:

$$\langle l \rangle = \langle v \rangle \tau = \frac{1}{n S_{\text{эф}}}. \quad (12.2)$$

Однако мы полагали, что все молекулы системы неподвижны, а движется только одна. Необходимо учесть движение всех молекул, т.е. рассматривая ту же задачу в системе отсчета, связанной с движущейся молекулой, нужно заменить скорость $\langle v \rangle$ на относительную скорость движения молекул. Поскольку все направления относительного движения молекул равновероятны, то угол между направлениями скоростей молекул лежит в диапазоне $0 - \pi$, а средний угол равен $\pi/2$. Тогда модуль относительной скорости движения молекул в соответствии с (1.18) определится как $\sqrt{2} \langle v \rangle$. С учетом этого замечания и формулы (12.1) можно записать выражение (12.2) в виде

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n S_{\text{эф}}} = \frac{1}{4\sqrt{2} n \pi R^2}. \quad (12.3)$$

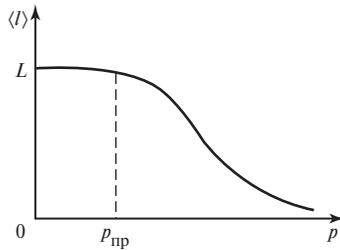


Рис. 12.4

Как известно, в идеальном газе справедливо уравнение состояния в виде соотношения (8.11). Тогда (12.3) перепишем следующим образом:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n S_{\text{эф}}} = \frac{kT}{4\sqrt{2} p \pi R^2}. \quad (12.4)$$

Оценим среднюю длину свободного пробега молекулы азота при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 10^5$ Па. Принимая во внимание, что $R \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ м, получаем согласно (12.4) $\langle l \rangle = 2 \cdot 10^{-7}$ м.

График зависимости средней длины свободного пробега $\langle l \rangle$ от давления газа p при постоянной температуре изображен на рис. 12.4. При его построении учтено, что если давление газа снижается ниже давления предельно достижимого вакуума $p_{\text{пр}}$, то значение $\langle l \rangle$ соответствует характерному размеру сосуда L , т.е. молекулы будут пролетать весь сосуд без соударения одна с другой.

В соответствии с (12.4) средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ не должна зависеть от температуры газа T . Однако экспериментально подтверждено, что она слабо растет с увеличением температуры. Происходит это из-за того, что с ростом температуры уменьшается значение R . На рис. 12.2 показано, что расстояние наибольшего сближения молекул уменьшается с увеличением запаса полной энергии системы молекул, т.е. с увеличением температуры: $r_2 < r_1$.

12.2. Диффузия

Рассмотрим неравновесное состояние системы молекул, вызванное нарушением равномерного распределения концентрации молекул по объему системы. При этом система может состоять как из молекул одного вещества (одинаковые молекулы), так и из молекул разных веществ (смесь разных молекул). Опыт показывает, что в однофазной системе молекул при постоянной температуре и отсутствии внешних

сил происходит выравнивание концентрации каждого компонента по всему объему системы. *Неравновесный процесс, вызываемый молекулярным тепловым движением и приводящий к установлению равновесного распределения концентраций путем взаимопроникновения и перемешивания молекул, называется диффузией.* Диффузия — один из процессов переноса. Поскольку в этом процессе рассматривается перемещение молекул по объему системы, то диффузия — это перенос массы. Диффундировать могут и молекулы примесей (компонентов смеси), и молекулы однокомпонентной системы. Диффузия — необратимый процесс, один из источников диссипации (рассеяния) энергии в системе.

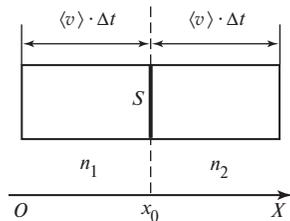


Рис. 12.5

Выведем уравнение, позволяющее количественно описать процесс диффузии. Пусть в направлении оси OX установилось неравномерное распределение концентрации молекул (рис. 12.5). Выделим при $x = x_0$ элемент поверхности S , слева от которого концентрация молекул n_1 , а справа — n_2 . Подсчитаем *поток частиц*, т.е. число молекул, проходящих в единицу времени через этот элемент поверхности. Если средняя скорость движения молекул $\langle \vec{v} \rangle$ направлена вдоль оси OX , то за время Δt все молекулы, находящиеся слева от этого сечения, из объема $S \langle v \rangle \Delta t$ уйдут вправо. Число таких молекул $n_1 S \langle v \rangle \Delta t$. Аналогично из такого же объема, находящегося справа от сечения, за время Δt все молекулы уйдут влево. Число таких молекул $n_2 S \langle v \rangle \Delta t$. Назовем *плотностью потока молекул* их число, проходящее через единичное сечение, расположенное перпендикулярно вектору скорости, за единицу времени:

$$\Phi = \frac{N}{S \Delta t}. \quad (12.5)$$

Тогда поток частиц слева направо $N_1 = n_1 \langle v \rangle S$, а поток частиц справа налево $N_2 = n_2 \langle v \rangle S$. Поскольку эти потоки частиц идут в разных направлениях, то общий поток в положительном направлении оси OX будет определяться их разностью.

Необходимо учесть, что движение молекул вдоль выбранного направления можно рассматривать прямолинейным, если за время Δt скорость молекул не меняет своего направления. Это возможно, если молекулы пересекают сечение S без столкновений. Следовательно,

мы должны учитывать движение только тех молекул, которые удалены от x_0 на расстояние, не превышающее $\langle l \rangle$. Пусть при таком рассмотрении концентрация молекул изменяется от $n_{x_0 - \langle l \rangle}$ до $n_{x_0 + \langle l \rangle}$. Тогда суммарная плотность потока частиц через выбранное сечение будет:

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \langle v \rangle (n_{x_0 - \langle l \rangle} - n_{x_0 + \langle l \rangle}).$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \Phi &= - \langle v \rangle (n_{x_0 + \langle l \rangle} - n_{x_0 - \langle l \rangle}) = - \langle v \rangle (n_{x_0 + \langle l \rangle} - n_{x_0 - \langle l \rangle}) \frac{2 \langle l \rangle}{2 \langle l \rangle} = \\ &= - 2 \langle l \rangle \langle v \rangle \frac{n_{x_0 + \langle l \rangle} - n_{x_0 - \langle l \rangle}}{2 \langle l \rangle} = - 2 \langle l \rangle \langle v \rangle \frac{dn}{dx}. \end{aligned}$$

В положительном направлении выбранной оси Ox движется только 1/6 часть всех молекул системы, поэтому окончательно

$$\Phi = - \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \frac{dn}{dx}. \quad (12.6)$$

Первые три сомножителя полученного выражения определяют **коэффициент диффузии**:

$$D = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle. \quad (12.7)$$

Окончательно (12.6) можно записать следующим образом:

$$\Phi = - D \frac{dn}{dx}. \quad (12.8)$$

Это формула **закона диффузии**, который был выведен А. Фиком в 1855 г.: *плотность диффузионного потока частиц пропорциональна градиенту концентрации частиц*. Знак «-» в (12.8) имеет физический смысл: при диффузии поток частиц направлен в сторону убывания их концентрации, т.е. $\Phi > 0$ в таком направлении, когда $\frac{dn}{dx} < 0$.

Из (12.8) следует выражение для диффузионного потока частиц:

$$N = - D \frac{dn}{dx} S. \quad (12.9)$$

Если умножить обе части (12.9) на массу одной молекулы m_0 , то определим выражение для потока массы:

$$M = - D \frac{d\rho}{dx} S, \quad (12.10)$$

где $\rho = m_0 n$ — плотность вещества.

Проанализируем выражение коэффициента диффузии (12.7). С учетом (12.4) получим:

$$D = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle = \frac{1}{3} \langle v \rangle \frac{kT}{4\sqrt{2} \pi p R^2}.$$

Из этого соотношения видно, что при увеличении давления диффузия должна ослабляться, так как D уменьшается. Другими словами, через «плотную толпу» частиц пробираться сложнее. Также диффузия ослабляется и при увеличении эффективного размера частиц R (через «толпу толстяков» тоже сложнее пробираться).

Единица измерения коэффициента диффузии в СИ $[D] = \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$.

Оценим время диффузии $\tau_D \approx L^2/D$, где L — характерное расстояние, на которое продвинулись молекулы в результате диффузии. Сопоставим время диффузии с временем пролета молекулами расстояния L : $t = L/\langle v \rangle$.

Тогда получим

$$\tau_D/t = L \langle v \rangle / D. \quad (12.11)$$

Если задать $L = \langle l \rangle$, т.е. рассмотреть диффузию на расстоянии, равном средней длине свободного пробега молекул, то с учетом (12.7) выражение (12.11) позволяет получить $\tau_D/t = 3$, т.е. диффузия на расстояние $\langle l \rangle$ происходит в 3 раза медленнее, чем свободное движение молекул. Оценим отношение (12.11) при $L = 1$ см. В соответствии с (9.15) средняя скорость движения молекул идеального

газа $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$. Выберем для примера азот при температуре

$T = 300$ К. Тогда $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 300}{\pi \cdot 0,028}} \approx 476$ м/с.

Поскольку в нашем примере $\langle l \rangle = 2 \cdot 10^{-7}$ м (см. § 12.1), то коэффициент диффузии, согласно (12.7), составит:

$$D = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 476 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Соотношение (12.11) дает:

$$\frac{\tau_D}{t} = \frac{L \langle l \rangle}{D} = \frac{0,01 \cdot 476}{3 \cdot 10^{-5}} \approx 2 \cdot 10^5.$$

Таким образом, диффузия на расстояние 1 см происходит в 200 000 раз медленнее, чем перемещение молекул при хаотичном движении в результате соударений.

Эти примеры показывают, что необходимо существенно различать хаотичное перемещение молекул по объему системы в результате теплового движения и направленное перемещение молекул в сторону уменьшения концентрации частиц в результате диффузии.

12.3. Теплопроводность

Опыт показывает, что неравномерное распределение температуры в пространстве системы приводит к ее выравниванию и установлению состояния теплового равновесия (это является следствием второго начала термодинамики). *Молекулярный перенос теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры, называется **теплопроводностью***. Рассматривая этот процесс, можно ввести понятие плотности теплового потока, аналогично плотности потока частиц (12.5):

$$q = \frac{Q}{S\Delta t}, \quad (12.12)$$

т.е. **плотностью теплового потока** назовем количество теплоты, проходящее через единичную поверхность за единицу времени.

Плотность потока частиц, согласно (12.8), выразим так:

$$\Phi = -D \frac{dn}{dx} = -\frac{D}{V} \frac{dN}{dx}. \quad (12.13)$$

Сравнение формул (12.5) и (12.12) показывает, что по аналогии с (12.13) можно записать

$$q = -\frac{D}{V} \frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \frac{1}{V} \frac{dQ}{dx}.$$

Поскольку при теплопроводности не изменяется объем системы, то $dQ = mc_V dT$, где c_V — удельная теплоемкость системы при постоянном объеме, а m — ее масса. Тогда из последнего выражения получим, что

$$q = -\frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle mc_V \frac{1}{V} \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle c_V \rho \frac{dT}{dx}.$$

Первые сомножители в полученном равенстве — постоянные величины, зависящие от свойств и состояния системы. Введем понятие **коэффициента теплопроводности**:

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle c_V \rho. \quad (12.14)$$

Тогда

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (12.15)$$

Полученное выражение — *закон теплопроводности* Ж.-Б. Фурье (1822 г.): *плотность теплового потока при теплопроводности пропорциональна градиенту температуры в системе*. При этом перенос теплоты осуществляется в направлении снижения температуры. Из (12.15) следует физический смысл коэффициента теплопроводности: он численно равен плотности теплового потока при единичном градиенте температуры. В системе единиц СИ единицей измерения λ служит Вт/(м·К).

Рассмотрим зависимость λ от давления для идеального газа. При низких давлениях, когда средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ сопоставима с характерным размером сосуда L (см. рис. 12.4), из (12.14) следует, что

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle c_V \rho \approx \frac{1}{3} L \langle v \rangle c_V \rho = \frac{1}{3} L \langle v \rangle c_V m_0 n,$$

где m_0 — масса молекулы. Поскольку первые четыре сомножителя — постоянные величины, то это выражение показывает, что при низких давлениях газа коэффициент теплопроводности пропорционален концентрации молекул, а значит давлению газа.

При средних и высоких давлениях газа, когда $\langle l \rangle \ll L$, из (12.14) получим:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle c_V \rho = \frac{1}{3} \frac{1}{nS_{\text{эф}}} \langle v \rangle c_V \frac{m_0 N}{V} = \frac{1}{3} \frac{1}{nS_{\text{эф}}} \langle v \rangle c_V m_0 n = \\ &= \langle v \rangle c_V m_0 \frac{1}{S_{\text{эф}}} = \text{const}. \end{aligned}$$

Таким образом, при средних и высоких давлениях газа его теплопроводность не зависит от давления.

Сравнение выражений (12.7) и (12.14) позволяет установить связь коэффициента диффузии и коэффициента теплопроводности:

$$\lambda = D c_V \rho, \quad (12.16)$$

отсюда следует, что скорость теплопроводности соответствует скорости диффузии молекул.

12.4. Вязкость жидкостей и газов

Свойство жидкостей и газов, характеризующее сопротивление действию внешних сил, вызывающих их течение, называется вязкостью (внутренним трением) Рассмотрим ламинарное течение жидкости (газа), т.е. такое, при котором жидкость (газ) перемещается

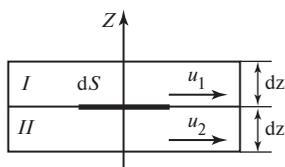


Рис. 12.6

слоями без перемешивания (lamina — полоска, пластина). Согласно гипотезе И. Ньютона, при таком течении при сдвиге соседних слоев среды одного относительно другого возникает сила противодействия этому сдвигу, которая пропорциональна скорости относительного смещения слоев. Жидкости, для которых эта гипотеза оказывается верной, называются *ньютоновскими*.

Таким образом, в ньютоновских жидкостях возникает сопротивление перемещению слоев одного относительно другого.

При перемещении всей жидкости в каком-то направлении каждая молекула жидкости участвует в двух движениях: хаотичном тепловом, средняя скорость которого $\langle v \rangle$, и направленном упорядоченном, скорость которого u . Следует отметить, что $\langle v \rangle \gg u$ (см. пример расчета $\langle v \rangle$ в § 12.2). Следовательно, в силу теплового движения молекул будет происходить их перемещение из слоя в слой, при этом молекулы будут обмениваться своими импульсами. Таким образом, можно рассматривать вязкость как перенос импульса.

Для количественного описания переноса импульса из одного слоя молекул в другой рассмотрим два соседних слоя толщиной dz каждый (рис. 12.6). Скорости направленного движения молекул в этих слоях различны, их модули равны соответственно u_1 и u_2 . Через площадку dS , разделяющую слои, в обе стороны идет поток частиц, вызванный их тепловым движением со скоростью $\langle v \rangle$. Плотность этого потока в обе стороны одинакова: $\Phi = \frac{1}{6} n \langle v \rangle$. Соответственно число частиц, переносимое через эту площадку за время dt , составляет $dN = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS dt$. Поэтому из слоя I «уносится» импульс $dp' = dN m u_1$, а «приносится» из слоя II импульс $dp'' = dN m u_2$.

Следовательно, общий баланс изменения импульса в слое составит

$$dp = dp'' - dp' = dN m (u_2 - u_1) = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS dt m (u_2 - u_1).$$

Плотность потока импульса определим следующим образом:

$$K = \frac{dp}{dS dt} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m (u_2 - u_1). \quad (12.17)$$

Эта формула описывает плотность потока импульса молекул, переносимого из слоя со скоростью u_2 в слой со скоростью u_1 , если эти скорости не изменяются в результате столкновений молекул при

их движении вдоль оси Z . Поскольку минимальное расстояние, на котором скорости молекул остаются неизменными, составляет $\langle l \rangle$, то преобразуем выражение (12.17):

$$K = -\frac{1}{6} n \langle v \rangle m (u_2 - u_1) \frac{2 \langle l \rangle}{2 \langle l \rangle} = -\frac{1}{3} n \langle l \rangle \langle v \rangle m \frac{du}{dz} = -\frac{1}{3} \rho \langle l \rangle \langle v \rangle \frac{du}{dz}.$$

Обозначим произведение постоянных сомножителей в этом выражении через η и назовем его *коэффициентом внутреннего трения (динамической вязкостью)*:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle l \rangle \langle v \rangle. \quad (12.18)$$

Тогда получим

$$K = -\eta \frac{du}{dz}, \quad (12.19)$$

т.е. *плотность потока импульса молекул, переносимого в каком-то направлении, прямо пропорциональна градиенту скорости частиц в этом направлении*. Формула (12.19) была получена французским физиком Ж.Л.-М. Пуазейлем (1799—1869) и называется *законом внутреннего трения Пуазейля*.

Поскольку перенос импульса молекул из слоя в слой, т.е. изменение импульса молекул каждого выбранного слоя, согласно гипотезе Ньютона, связан с действием силы вязкого трения между слоями молекул, то можно определить эту силу. Вспомним выражение (2.10) второго закона Ньютона, связывающее изменение импульса системы с действием внешних сил на систему:

$$dp = F dt.$$

Тогда с учетом (12.17) из выражения (12.19) можно получить:

$$F = \eta \frac{du}{dz} dS, \quad (12.20)$$

где dS — поверхность, по которой действует сила F . Вектор \vec{F} направлен вдоль границы слоя, поэтому называется *тангенциальной силой*. Полученное выражение называется *законом Ньютона для внутреннего трения* и определяет численные значения двух противоположно направленных сил, с которыми соседние слои молекул действуют один на другой. Поэтому в (12.20) нельзя писать перед правой частью знак минус. Однако сила F считается положительной, если слой молекул ускоряется под действием соседних, и отрицательной, если соседние слои молекул тормозят выделенный слой.

Из (12.20) следует физический смысл коэффициента внутреннего трения: он определяется отношением тангенциальной силы, необходимой для поддержания единичного градиента скорости между

двумя слоями, к площади соприкосновения этих слоев. В СИ единицей измерения η является паскаль-секунда: $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}$. Следовательно, $1 \text{ Па} \cdot \text{с}$ — это вязкость такой среды, в которой при единичном градиенте скорости возникает касательное напряжение внутреннего трения, равное 1 Н/м^2 .

Поскольку $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle l \rangle \langle v \rangle$, то с учетом (12.3) получим выражение для динамической вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \frac{1}{\sqrt{2} n S_{\text{эф}}} = \frac{1}{3} m_0 n \langle v \rangle \frac{1}{\sqrt{2} n S_{\text{эф}}} = \frac{1}{3} m_0 \langle v \rangle \frac{1}{\sqrt{2} S_{\text{эф}}}.$$

Отсюда следует, что коэффициент внутреннего трения не зависит ни от концентрации молекул, ни от плотности вещества, ни от давления.

Поскольку $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, то $\eta \sim \sqrt{T}$.

Рассмотрим пример ламинарного течения жидкости с постоянной скоростью в цилиндрической трубе (рис. 12.7). Выделим некоторый цилиндрический объем жидкости высотой H и радиусом r . Его передвижение по трубе обеспечивается разностью давлений p_1 и p_2 , действующих со стороны окружающей жидкости. Если движение жидкости на рис. 12.7 осуществляется вверх, то $p_2 < p_1$. Поэтому равнодействующая сил внешнего давления на выделенный элемент жидкости определится как $F_{\text{внеш}} = (p_1 - p_2)S = (p_1 - p_2)\pi r^2$. Внешние слои жидкости, окружающие выделенный объем, тормозят его из-за наличия внутреннего трения в жидкости. Поэтому возникает сила вязкого трения, значение которой определяется в выбранной системе координат (Y, r) , согласно (12.20) с учетом знака:

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{du_y}{dr} dS = -\eta \frac{\partial u_y}{\partial r} 2\pi r H.$$

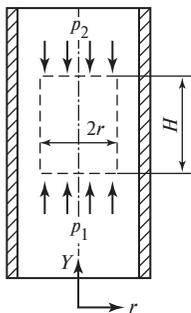


Рис. 12.7

При установившемся течении жидкости с постоянной скоростью силы $F_{\text{внеш}}$ и $F_{\text{тр}}$ компенсируют одна другую:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{\partial u_y}{\partial r} 2\pi r H.$$

Решим полученное дифференциальное уравнение. Для этого разделим переменные:

$$\partial u_y = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta H} r dr.$$

После интегрирования получим:

$$u_y = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta H} \frac{r^2}{2} + C.$$

Постоянную интегрирования C определим с учетом граничного условия: $u_y = 0$ при $r = R$, где R — радиус трубы. Тогда

$$C = \frac{p_1 - p_2}{2\eta H} \frac{R^2}{2}.$$

Окончательно получаем выражение для осевой скорости течения жидкости в трубе:

$$u_y = \frac{p_1 - p_2}{4\eta H} (R^2 - r^2).$$

График этой зависимости изображен на рис. 12.8. Мы получили параболическую зависимость скорости. На рисунке также показаны векторы скорости течения некоторых слоев жидкости. Общий вывод для рассмотренной задачи можно сформулировать так: при ламинарном течении жидкости внешние силы поддерживаются равными касательным силам внутреннего трения, и в среде устанавливается постоянный во времени градиент скорости слоев в направлении, перпендикулярном течению жидкости.

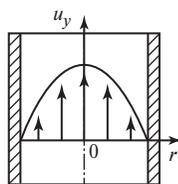


Рис. 12.8

12.5. Связь коэффициентов переноса

Обобщим выведенные соотношения в виде таблицы.

Таблица

Явление	Что переносится	Закон	Коэффициент
Диффузия	Масса $dM = -D \frac{dp}{dx} dt dS$	Фика $\Phi = -D \frac{dn}{dx}$	$D = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle$
Теплопроводность	Энергия $dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} dt dS$	Фурье $q = -\lambda \frac{dT}{dx}$	$\lambda = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \rho c_V = D \rho c_V$
Вязкость	Импульс $dp = -\eta \frac{du}{dx} dt dS$	Пуазейля $K = -\eta \frac{du}{dz}$	$\eta = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \rho = D \rho = \frac{\lambda}{c_V}$

Примечание. Напомним, что c_V — это удельная теплоемкость.

Неравновесные процессы, рассмотренные нами как явления переноса, связаны с движением молекул. Перенос вещества, энергии и импульса в сплошной среде обусловлен столкновениями молекул.

Поэтому законы, описывающие явления переноса, аналогичны один другому по математической форме записи. Коэффициенты в этих законах также оказываются связанными один с другим.

Формулы для коэффициентов переноса показывают, что коэффициенты внутреннего трения и теплопроводности не зависят от давления газа. Это было установлено Максвеллом и в свое время вызвало серьезные трудности в признании молекулярно-кинетической теории газов и ее выводов. Формально все сводится к тому, что в выражениях (12.14) и (12.18) плотность ρ входит и в числитель, и в знаменатель, поскольку средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ обратно пропорциональна плотности. Поэтому коэффициенты переноса η и λ от плотности газа (и его давления) не зависят. Физически это объясняется тем, что для не слишком разреженных газов при неизменной температуре с ростом давления (а следовательно, и плотности) в переносе импульса и энергии принимает участие все большее число молекул. Однако каждая из них за счет уменьшения средней длины свободного пробега переносит меньший импульс упорядоченного движения (при рассмотрении вязкости) или меньшую энергию (при рассмотрении теплопроводности). Поэтому в целом для всей массы газа перенос импульса и энергии не изменяется.

Из приведенной таблицы видно, что по найденным из опыта значениям коэффициента диффузии, теплопроводности или вязкости можно определить остальные коэффициенты переноса.

Глава 13

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Пример 13.1. Баллон емкостью V , наполненный воздухом при давлении p и температуре T , имеет вес F . Вес этого баллона при давлении воздуха p_1 и той же температуре равен F_1 . Найдите значение универсальной газовой постоянной.

Пусть вес самого баллона равен F_0 . Тогда массы газа, находящегося в баллоне при первом и втором взвешиваниях, равны

$$m_1 = \frac{F - F_0}{g} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{F_1 - F_0}{g}. \quad \text{Уравнения состояния идеального газа}$$

для этих двух случаев имеют вид: $pV = \frac{F - F_0}{g\mu} RT$ и $p_1 V = \frac{F_1 - F_0}{g\mu} RT$.

$$\text{Откуда } (p - p_1)V = \frac{F - F_1}{g\mu} RT, \text{ окончательно получаем: } R = \frac{(p - p_1)Vg\mu}{(F - F_1)T}.$$

Пример 13.2. Смесь идеальных газов состоит из $m_1 = 4$ кг неона и $m_2 = 1$ кг водорода. Определите удельные теплоемкости смеси газов в изобарном и изохорном процессах.

Рассмотрим изобарный процесс ($p = \text{const}$). Бесконечно малое количество теплоты δQ , сообщенное смеси в этом процессе, связано с изменением температуры смеси dT соотношением

$$\delta Q = c_{\text{уд}p} m dT, \quad (13.1)$$

где $c_{\text{уд}p}$ — удельная теплоемкость смеси газов при постоянном давлении. Общее количество теплоты, сообщенное системе, распределяется между компонентами смеси:

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2,$$

где $\delta Q_1 = c_{\text{уд}p1} m_1 dT$; $\delta Q_2 = c_{\text{уд}p2} m_2 dT$ — количество теплоты, полученное неоном и водородом соответственно. Тогда

$$\delta Q = (c_{\text{уд}p1} m_1 + c_{\text{уд}p2} m_2) dT. \quad (13.2)$$

Из (13.1) и (13.2) получаем

$$c_{уд p}(m_1 + m_2) = c_{уд p1}m_1 + c_{уд p2}m_2,$$

откуда

$$c_{уд p} = c_{уд p1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{уд p2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (13.3)$$

Аналогично получаем выражение для удельной теплоемкости смеси в изохорном процессе:

$$c_{уд V} = c_{уд V1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{уд V2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (13.4)$$

Учтем, что из соотношений (10.8) и (10.10) следуют выражения для удельных теплоемкостей идеального газа при постоянном объеме и постоянном давлении:

$$c_{уд V} = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}, \quad c_{уд p} = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}.$$

Для смеси получаем:

$$c_{уд V} = \frac{R}{2(m_1 + m_2)} \left[\frac{i_1}{\mu_1} m_1 + \frac{i_2}{\mu_2} m_2 \right]; \quad (13.5)$$

$$c_{уд p} = \frac{R}{2(m_1 + m_2)} \left[\frac{i_1+2}{\mu_1} m_1 + \frac{i_2+2}{\mu_2} m_2 \right]. \quad (13.6)$$

Поскольку неон — одноатомный газ, то $i_1 = 3$; так как водород — двухатомный газ, то $i_2 = 5$. Подстановка числовых данных задачи дает:

$$c_{уд V} = 2,58 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}); \quad c_{уд p} = 3,76 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Пример 13.3. Кислород находится в сосуде объемом V_1 при давлении p_1 и температуре T_1 . В некотором политропном процессе его объем увеличивается в 2 раза, а давление падает в 4 раза. Определите показатель политропы в данном процессе, массу кислорода, конечную температуру, удельную теплоемкость кислорода в данном процессе, изменение внутренней энергии газа, количество теплоты, сообщаемой газу (или отдаваемой газом) в этом процессе.

В соответствии с уравнением политропного процесса (10.13) можно записать: $p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$, где n — показатель политропы. Тогда

$p_1 V_1^n = \frac{1}{4} p_1 (2V_1)^n$, откуда получаем $n = 2$. Поэтому данный политропный процесс описывается уравнением

$$pV^2 = \text{const}. \quad (13.7)$$

Массу газа определим из уравнения состояния $p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$:

$$m = \frac{p_1 V_1 \mu}{RT_1}. \quad (13.8)$$

Конечную температуру газа найдем из уравнения состояния $p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$: $T_2 = \frac{p_2 V_2 \mu}{mR}$. Подставляя сюда $p_2 = p_1/4$, $V_2 = 2V_1$ и (13.8), получаем

$$T_2 = \frac{1}{2} T_1. \quad (13.9)$$

Поскольку в соответствии с (10.14) молярная теплоемкость газа в политропном процессе связана с показателем политропы соотношением

$$c_m = c_{mV} - \frac{R}{n-1}, \quad (13.10)$$

а удельная теплоемкость газа связана с молярной теплоемкостью газа выражением $c_{\text{уд}} = c_m/\mu$, то $c_{\text{уд}} = c_{\text{уд}V} - \frac{R}{\mu(n-1)}$. Учтем, что $c_{\text{уд}V} = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$, число степеней свободы молекулы кислорода $i = 5$ и в данном процессе $n = 2$. Тогда

$$c_{\text{уд}} = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu} - \frac{R}{\mu} = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu}. \quad (13.11)$$

Изменение внутренней энергии газа определим из формулы (10.5). В нашем случае $i = 5$, $\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} T_1$, а масса газа m определена соотношением (13.8). Окончательно получаем:

$$\Delta U = -\frac{5}{4} p_1 V_1. \quad (13.12)$$

Количество теплоты, получаемое (отдаваемое) газом определяется выражением $Q = c_{\text{уд}} m \Delta T$. Подставим сюда (13.8) и (13.11), получим:

$$Q = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} \frac{p_1 V_1 \mu}{RT_1} \left(-\frac{1}{2} T_1 \right) = -\frac{3}{4} p_1 V_1. \quad (13.13)$$

Знак «-» в выражении (13.13) показывает, что в данном политропном процессе количество теплоты отводится от газа.

Пример 13.4. Определите КПД цикла, представленного на рис. 13.1, если он совершается одним молем идеального одноатомного газа. Процесс $1-2$ описывается линейной зависимостью $p(V)$, процесс $2-1$ — адиабатный. Известны объемы газа в начальном и конечном состояниях V_1 и V_2 , а также температура газа в начальном состоянии T_1 .

Если предположить, что в процессе $1-2$ к газу подводится количество теплоты Q_{12} , то, в соответствии с выражением (11.3), КПД заданного цикла

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{21}|}{Q_{12}} = 1,$$

поскольку в адиабатном процессе $Q_{21} = 0$. Этот вывод противоречит второму началу термодинамики, согласно которому КПД любого цикла всегда меньше единицы. Следовательно, предположение о том, что на протяжении всего процесса $1-2$ к газу подводится некоторое количество теплоты, неверно. На участке $1-\theta$ количество теплоты Q_{10} подводится к газу, а на участке $\theta-2$ некоторое количество теплоты Q_{02} должно отводиться от газа (рис. 13.1). В этом случае противоречие со вторым началом термодинамики пропадает, и КПД цикла может быть рассчитан по известным соотношениям (11.2) или (11.3).

Определим объем V_0 . Для этого рассмотрим элементарный процесс на участке $1-2$ вблизи точки θ . Запишем уравнение первого начала термодинамики для 1 моля: $\delta Q = c_{mV} dT + p dV$, где c_{mV} —

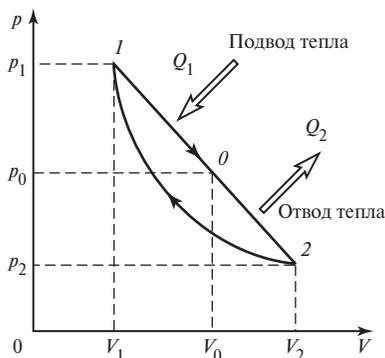


Рис. 13.1

молярная теплоемкость газа в изохорном процессе. Так как $\delta Q = 0$ в окрестности точки θ с объемом V_0 , то

$$(c_{mV} dT + p dV) \Big|_{V_0} = 0. \quad (13.14)$$

Уравнение процесса 1-2 имеет вид $p = a + bV$, где a и b — постоянные коэффициенты. Учитывая уравнение состояния $pV = RT$, получаем $(a + bV)V = RT$, откуда $T = (a + bV)V/R$. Из последнего выражения определим $dT = \frac{1}{R} (a dV + 2bV dV)$. Подставим последнее соотношение в (13.14):

$$\frac{c_{mV}}{R} (a + 2bV_0) + (a + bV_0) = 0.$$

После преобразований получаем

$$V_0 = -\frac{a}{b} \frac{\gamma}{\gamma + 1}, \quad (13.15)$$

где γ — показатель Пуассона [см. (10.16)].

Коэффициенты a и b определим из системы уравнений

$$p_1 = a + bV_1;$$

$$p_2 = a + bV_2,$$

решив которую получим:

$$a = \frac{p_1 V_2 - p_2 V_1}{V_2 - V_1}; \quad b = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2}, \quad (13.16)$$

где $p_1 = RT_1/V_1$, $p_2 = RT_2/V_2$. Конечную температуру T_2 определим, используя уравнение Пуассона:

$$T_2 = T_1 (V_1/V_2)^{\gamma-1}.$$

Таким образом, значение объема V_0 полностью определено. Другие параметры газа в состоянии «0» легко определяются:

$$p_0 = a + bV_0, \quad (13.17)$$

$$T_0 = \frac{p_0 V_0}{R} = \frac{a + bV_0}{R} V_0. \quad (13.18)$$

Коэффициент полезного действия цикла находим по соотношению (11.2).

Работа газа за цикл равна сумме работ в процессах 1-2 и 2-1: $A_{ц} = A_{12} + A_{21}$. Для процесса 1-2:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} (a + bV) dV = a(V_2 - V_1) + \frac{b}{2} (V_2^2 - V_1^2).$$

Для адиабатного процесса 2-1:

$$A_{21} = -\Delta U_{21} = -c_{mV}(T_1 - T_2) = c_{mV}(T_2 - T_1).$$

Таким образом

$$A_{ц} = a(V_2 - V_1) + \frac{b}{2} (V_2^2 - V_1^2) + c_{mV}(T_2 - T_1). \quad (13.19)$$

Для определения количества теплоты, подводимого на участке 1-0, воспользуемся первым началом термодинамики:

$$Q_{10} = \Delta U_{10} + A_{10},$$

где $A_{10} = \int_{V_1}^{V_0} (a + bV) dV = a(V_0 - V_1) + \frac{b}{2}(V_0^2 - V_1^2)$; $\Delta U_{10} = c_{mV}(T_0 - T_1)$.

Окончательно

$$Q_{10} = c_{mV}(T_0 - T_1) + a(V_0 - V_1) + \frac{b}{2}(V_0^2 - V_1^2). \quad (13.20)$$

С учетом (13.19) и (13.20) получаем

$$\eta = \frac{A_{ц}}{Q_{10}} = \frac{a(V_2 - V_1) + \frac{b}{2} (V_2^2 - V_1^2) + c_{mV}(T_2 - T_1)}{a(V_0 - V_1) + \frac{b}{2} (V_0^2 - V_1^2) + c_{mV}(T_0 - T_1)}.$$

Пример 13.5. Расстояние между стенками сосуда Дьюара $L = 5$ мм. Оцените давление воздуха между стенками, ниже которого средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре $t = 20$ °С будет больше расстояния между стенками. Диаметр эффективного сечения молекул воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-8}$ см.

Для решения задачи воспользуемся соотношением (12.4):

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{4\sqrt{2} p \pi R^2} = \frac{kT}{\sqrt{2} p \pi d^2}.$$

Из этой формулы следует, что при уменьшении давления средняя длина свободного пробега молекул возрастает и при некотором пре-

дельном значении $p_{\text{п}}$ становится равной расстоянию между стенками сосуда Дьюара, т.е. $\langle l \rangle = L$. Тогда предельное давление можно найти как $p_{\text{п}} = \frac{kT}{\sqrt{2} L \pi d^2}$. После подстановки числовых значений полу-

чаем: $p_{\text{п}} = 1,5 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. Таким образом, начиная с давления около 10^{-2} мм рт. ст. и ниже, молекулы проскакивают между стенками сосуда и практически не взаимодействуют одна с другой.

Пример 13.6. Найдите отношение числа молекул водорода, скорости которых лежат в пределах от 1990 до 2000 м/с к числу молекул, скорости которых лежат в пределах от 990 до 1000 м/с, при температуре 400 К.

Для решения задачи используем максвелловское распределение молекул газа по скоростям (9.13), которое определяет, какое число dN молекул газа из общего числа его молекул N в единице объема имеет при данной температуре скорости, заключенные в интервале от v до $v + dv$:

$$dN = N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 dv.$$

В рассматриваемой задаче заданный интервал скоростей достаточно мал по сравнению с абсолютным значением скоростей молекул, поэтому без большой погрешности можно перейти к конечным разностям:

$$\frac{\Delta N}{N} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 \Delta v.$$

Интервал скоростей в обоих случаях одинаков: $\Delta v_1 = \Delta v_2 = \Delta v$, поэтому

$$\frac{\Delta N_1}{N} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v_1^2}{2kT}} \cdot 4\pi v_1^2 \Delta v, \quad \frac{\Delta N_2}{N} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v_2^2}{2kT}} \cdot 4\pi v_2^2 \Delta v,$$

где v_1 и v_2 — среднеарифметические значения скоростей в соответствующих интервалах. Тогда

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 e^{-\frac{m_0(v_1^2 - v_2^2)}{2kT}}.$$

Для получения окончательного ответа необходимо найти массу молекулы водорода m_0 . Вспомним, что масса одного моля молекул (молярная масса) складывается из одинаковых масс N_A молекул: $\mu = N_A m_0$, где N_A — число Авогадро. Тогда $m_0 = \mu / N_A$. Учитывая, что $kN_A = R$, получаем:

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 e^{-\frac{\mu(v_1^2 - v_2^2)}{2RT}}.$$

Подстановка численных значений дает $\Delta N_1 / \Delta N_2 = 1,6$.

Глава 14

РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Свойства не сильно разреженных газов отличаются от свойств идеальных газов, подчиняющихся уравнению Клапейрона — Менделеева (8.9). Например, из этого уравнения следует, что отношение $\frac{pV}{\nu RT}$, называемое *фактором сжимаемости*, для идеальных газов всегда равно единице. Однако опыты показывают, что факторы сжимаемости для всех газов зависят от давления и температуры. При достаточно высоких давлениях все реальные газы независимо от их температуры менее сжимаемы, чем идеальные.

Экспериментальные исследования удельной теплоемкости, вязкости и других свойств газов показали, что эти свойства тоже значительно отличаются от соответствующих свойств идеальных газов. Более того, приближенная теория идеальных газов часто не в состоянии объяснить даже качественно характер зависимости свойств газов от их параметров состояния. Например, реальные газы могут быть переведены в жидкое и твердое состояния. Уравнение Клапейрона—Менделеева не описывает подобные процессы.

Отступления от законов идеальных газов связаны с тем, что между молекулами газа действуют силы, которые в теории идеальных газов не принимаются во внимание. Поведение молекул реальных газов отлично от того, какое приписывается частицам идеальных газов. Во всех реальных телах (твердых, жидких и газообразных) молекулы взаимодействуют одна с другой. Силы взаимодействия между молекулами в сильной степени зависят от расстояния между ними. Эти силы имеют электромагнитную, а также особую квантовую природу.

14.1. Молекулярные силы

Своеобразные свойства поверхностного слоя жидкостей, а также способность твердых тел сопротивляться растяжению свидетельствуют о том, что между молекулами вещества действуют силы взаимного притяжения. Малая сжимаемость сильно уплотненных газов, а также способность твердых тел и жидкостей сопротивляться сжатию указывают на то, что между молекулами действуют и силы взаимного отталкивания. Важно, что силы притяжения и отталкивания

молекул действуют одновременно. Иначе молекулы, образующие тела, или разлетались бы в разные стороны, или «слипались».

Кроме того, зависимость сил взаимного притяжения и отталкивания молекул от расстояния между ними должна быть различной: на очень близких расстояниях преобладают силы отталкивания, а на более далеких — силы притяжения. На рис. 14.1 показан примерный характер зависимостей $F_{\text{пр}}(r)$ и $F_{\text{от}}(r)$. Так обозначены проекции сил притяжения $\vec{F}_{\text{пр}}$ и отталкивания $\vec{F}_{\text{от}}$ на направление вектора \vec{r} , проведенного в точку нахождения рассматриваемой молекулы из точки, где находится другая молекула, действующая на первую. Здесь же показана зависимость $F(r)$, где $F(r) = F_{\text{пр}}(r) + F_{\text{от}}(r)$.

При $r = r_0$ силы $\vec{F}_{\text{пр}}$ и $\vec{F}_{\text{от}}$ взаимно уравновешиваются и результирующая сила $\vec{F} = 0$. Если $r > r_0$, то преобладают силы взаимного притяжения, а если $r < r_0$, то преобладают силы отталкивания. Таким образом, r_0 — это такое расстояние между двумя молекулами, на котором они находились бы при отсутствии теплового движения, нарушающего это равновесие.

Найдем выражение потенциальной энергии взаимодействия двух молекул $U_{\text{п}}$. При увеличении расстояния между молекулами на dr потенциальная сила межмолекулярного взаимодействия \vec{F} совершает работу $\delta A = (\vec{F}, d\vec{r})$. Поскольку эта работа совершается за счет уменьшения взаимной потенциальной энергии молекул, то $\delta A =$

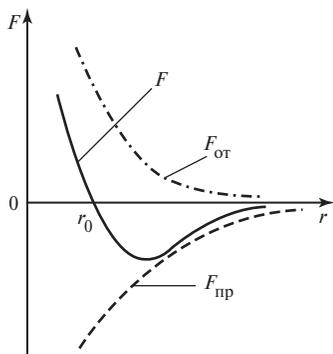


Рис. 14.1

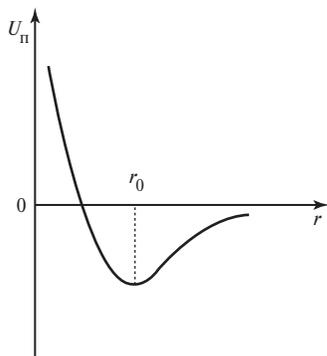


Рис. 14.2

$= -dU_{\Pi}$. Тогда $dU_{\Pi} = F dr$. Интегрируя это выражение по r от r до ∞ , получаем $U_{\Pi}(r) - U_{\Pi}(\infty) = \int_r^{\infty} F dr$.

На бесконечно большом расстоянии одной от другой молекулы не взаимодействуют. Поэтому удобно принять $U_{\Pi}(\infty) = 0$. Окончательно,

$$U_{\Pi}(r) = \int_r^{\infty} F dr. \quad (14.1)$$

Из рис. 14.1 видно, что при $r > r_0$ взаимная потенциальная энергия отрицательна, так как $F < 0$. При $r = r_0$, как видно из (14.1),

$$\left(\frac{dU_{\Pi}}{dr}\right)_{r=r_0} = -F(r_0) = 0,$$

т.е. функция $U_{\Pi}(r)$ достигает минимума. При сближении молекул до расстояния r_0 их взаимная потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая увеличивается. Происходит это за счет положительной работы сил взаимного притяжения молекул ($F < 0$ при $r > r_0$, рис. 14.1). При дальнейшем сближении молекул сила взаимного отталкивания молекул совершает отрицательную работу ($F > 0$ при $r < r_0$, рис. 14.1). Поэтому потенциальная энергия начинает расти. Характер зависимости $U_{\Pi}(r)$ показан на рис. 14.2.

Зависимость потенциальной энергии двух молекул реального газа от расстояния между ними может быть описана **формулой Ленарда — Джонса**:

$$U_{\Pi} = -\frac{a_1}{r^6} + \frac{a_2}{r^{12}}, \quad (14.2)$$

где a_1 и a_2 — положительные постоянные коэффициенты, зависящие от вида газа.

Дифференцируя (14.2) по r , находим зависимость проекции результирующей силы взаимодействия двух молекул реального газа:

$$F = -\frac{dU_{\Pi}}{dr} = -\frac{6a_1}{r^7} + \frac{12a_2}{r^{13}}. \quad (14.3)$$

Первое слагаемое в (14.3) соответствует силам молекулярного притяжения, которые часто называют **ван-дер-ваальсовыми силами** по имени нидерландского физика Я.Д. Ван-дер-Ваальса, который впервые начал учитывать межмолекулярное взаимодействие в газах. Второе слагаемое в (14.3) соответствует силам взаимного отталкивания молекул. Эти силы играют определяющую роль на малых расстояниях.

ниях, когда перекрываются электронные оболочки молекул. Существование сил взаимного отталкивания молекул при их очень сильном сближении удалось объяснить только в квантовой механике.

14.2. Уравнение Ван-дер-Ваальса

В первом приближении молекулы реального газа можно уподобить твердым шарикам диаметром d , между которыми действуют только силы взаимного притяжения. Такая модель газа, принятая Ван-дер-Ваальсом, позволила ему получить уравнение состояния реального газа более совершенное, чем уравнение Клапейрона—Менделеева.

Поскольку молекулы реального газа обладают «собственным объемом», то они движутся в сосуде не так свободно, как молекулы идеального газа. Учтем это, заменив в уравнении Клапейрона—Менделеева (8.9) $pV_m = RT$ полный объем сосуда, занимаемый молекулами газа, V_m на «свободный» объем $V_m^* = V_m - b$, где b — поправка Ван-дер-Ваальса. Значение b зависит от собственного объема молекулы, который равен $v = \frac{1}{6} \pi d^3$.

Рассмотрим сферу радиусом d , центр которой совпадает с центром произвольной молекулы. Центры других молекул, соударяющихся с данной, не могут находиться внутри этой сферы, которая представляет собой «запрещенное пространство» объемом $v_3 = \frac{4}{3} \pi d^3 = 8v$. Поскольку при таком рассмотрении мы дважды учли каждую молекулу (один раз как ударяющуюся, другой раз как ударяемую), то в пересчете на одну молекулу запрещенный объем составляет $\frac{1}{2} v_3 = 4v$. Поправка Ван-дер-Ваальса представляет собой запрещенный объем, приходящийся на все N_A молекул в моле газа: $b = 4vN_A$.

Из последнего выражения следует, что значение поправки зависит от эффективного диаметра молекул.

Теперь учтем влияние сил взаимного притяжения молекул газа. Поскольку эти силы быстро убывают с ростом расстояния между молекулами, то можно считать, что каждая молекула взаимодействует только с теми, которые удалены от нее не далее некоторого расстояния R , называемого *радиусом молекулярного действия*. Соответственно, сфера радиусом R вокруг данной молекулы образует *сферу молекулярного действия*. Если рассмотреть молекулу вдали от

стенок сосуда, то вся ее сфера молекулярного действия заполнена другими молекулами так, что результирующая сила притяжения для рассматриваемой молекулы равна нулю. У молекул, находящихся вблизи стенок сосуда, сферы молекулярного действия заполнены другими молекулами только частично. Можно показать, что для таких молекул результирующая сила притяжения направлена перпендикулярно стенке сосуда внутрь газа, причем она пропорциональна концентрации молекул газа:

$$F_k = a_k n, \quad (14.4)$$

где коэффициент a_k зависит от химической природы газа и расстояния от центра молекулы до стенки сосуда. Действие таких сил приводит к уменьшению давления реального газа на стенки сосуда по сравнению с давлением системы молекул идеального газа: $p = p_{\text{ид}} - p^*$, или

$$p_{\text{ид}} = p + p^*, \quad (14.5)$$

где p^* — давление, обусловленное действием сил взаимного притяжения молекул. Это давление можно определить по формуле

$$p^* = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^N F_k = \frac{1}{S} n \sum_{k=1}^N a_k,$$

где N — общее число всех молекул пограничного слоя газа; S — площадь стенок сосуда.

Общее число молекул в пограничном слое $N = SRn$. Поскольку $\sum_{k=1}^N a_k = N \langle a \rangle$, где $\langle a \rangle$ — среднее значение параметра a , то

$$p = \frac{n}{S} SRn \langle a \rangle = n^2 R \langle a \rangle = n^2 a'.$$

Представим концентрацию молекул газа в виде

$$n = \frac{\rho}{m_0} = \frac{\mu}{m_0} \frac{1}{V_m},$$

тогда

$$p^* = a' \frac{\mu^2}{m_0^2} \frac{1}{V_m^2} = \frac{a}{V_m^2}. \quad (14.6)$$

Коэффициент Ван-дер-Ваальса a зависит только от химической природы газа.

Подставим в уравнение Клапейрона — Менделеева (8.9) объем $V_m^* = V_m - b$ вместо V_m и давление $p_{ид} = p + p^*$ вместо p . Тогда, с учетом (14.6), получим:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT. \quad (14.7)$$

Это уравнение называется **уравнением Ван-дер-Ваальса** по имени ученого, впервые получившего его в 1873 г. Из (14.7) следует уравнение для произвольного числа $\nu = m/\mu$ молей реального газа:

$$\left(p + \nu^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT. \quad (14.8)$$

14.3. Изотермы реального газа

Английский физик Т. Эндрюс в 1866 г. экспериментально исследовал зависимость молярного объема углекислого газа от давления при изотермическом сжатии. Результаты этих опытов представлены на рис. 14.3. При температурах, меньших $T_{кр}$, на каждой изотерме имеется горизонтальный участок, на котором постоянно не только температура, но и давление, а молярный объем может принимать любые значения в некотором интервале от V_B до V_C . Разность $V_C - V_B$ возрастает с понижением температуры. При увеличении температуры эта разность стремится к нулю при приближении температуры к значению $T_{кр}$, которое называют **критической температурой**. Точки B и C сливаются в одну точку K — **критическую точку** — на изотерме, соответствующей критической температуре (**критической изотерме**).

Эксперимент показал, что давление монотонно возрастает при уменьшении молярного объема на двух участках изотермы. При значениях молярного объема $V_m > V_C$ углекислота находится в газообразном состоянии, а при $V_m < V_B$ — в жидком. Малая сжимаемость жидкостей приводит к тому, что участок изотермы при малых значениях объема вещества представляет собой почти вертикальную прямую. На участке BC углекислота одновременно находится в двух агрегатных состояниях: жидком и газообразном. Точка C соответствует началу конденсации CO_2 при изотермическом сжатии, а точка B — концу конденсации. Если процесс провести в обратном направлении, то в точке B жидкая углекислота начинает кипеть, а в точке C — заканчивает. Поэтому точка B на диаграмме соответствует состоянию кипящей жидкости, а точка C состоянию сухого насыщенного пара.

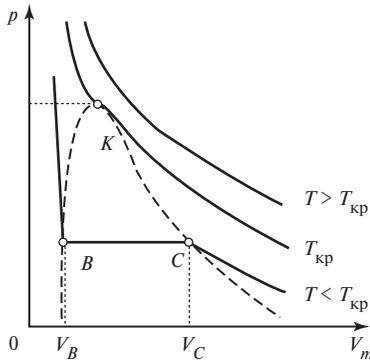


Рис. 14.3

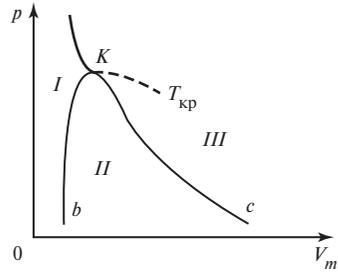


Рис. 14.4

Фазой в термодинамике называют совокупность всех частей системы, обладающих одинаковым химическим составом, находящихся в одинаковом состоянии и ограниченных поверхностями раздела. Таким образом, влажный пар (участок BC) представляет собой двухфазную систему, одна фаза которой — кипящая жидкость, а другая — сухой насыщенный пар.

Геометрическое место точек начала и окончания кипения на различных изотермах образует пограничную кривую, разделяющую диаграмму на области. На рис. 14.3 эта кривая показана штриховой линией, а на рис. 14.4 — сплошной. Кривая *bK* (рис. 14.4) отделяет однофазную область *I* жидкого состояния вещества от двухфазной области *II* его влажного пара. Кривая *cK* отделяет двухфазную область *II* от однофазной области *III* газообразного состояния вещества. При давлениях, больших критического (давления в точке *K*), вещество находится либо в жидком, либо в газообразном состоянии. Границей между ними является **критическая изотерма**, т.е. изотерма при такой температуре, выше которой газ нельзя сжатием перевести в жидкое состояние. Критическая точка — это особое состояние вещества. При приближении к нему исчезают различия между жидким и газообразным состояниями. В критическом состоянии обращаются в нуль разность молярных объемов кипящей жидкости и сухого насыщенного пара, удельная теплота парообразования и поверхностное натяжение жидкости.

Проанализируем изотермы реального газа с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса (14.7). Это уравнение можно преобразовать так:

$$pV_m^3 - (pb + RT)V_m^2 + aV_m - ab = 0. \quad (14.9)$$

В зависимости от числовых значений *p* и *T* для данного газа это уравнение третьей степени относительно молярного объема может

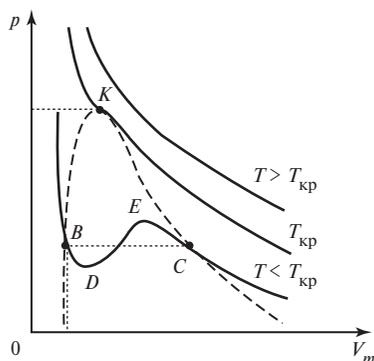


Рис. 14.5

иметь либо один, либо три действительных корня. Изотермы для газа, подчиняющегося уравнению (14.9), показаны на рис. 14.5. При температурах ниже критической каждому значению давления соответствуют три точки изотермы, т.е. три разных изотермических состояния. Эти волнообразные участки изотерм Ван-дер-Ваальса сильно отличаются от соответствующих горизонтальных участков экспериментальных изотерм Эндрюса. опыты показывают, что участок BD описывает поведение перегретой жидкости (жидкость не закипает в точке B при расширении). Аналогично, при медленном изотермическом сжатии газа можно получить пересыщенный пар, соответствующий участку CE . Участок DE практически неосуществим.

Изотерма $T = T_{кр}$ является критической, а точка перегиба этой изотермы — критической точкой. Значения критических параметров состояния $p_{кр}$, $T_{кр}$ и молярного объема $V_{кр}$ для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, можно выразить следующим образом:

$$p_{кр} = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}, \quad V_{кр} = 3b, \quad T_{кр} = \frac{8}{27} \frac{a}{bR}. \quad (14.10)$$

14.4. Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля — Томсона

Внутренняя энергия U реального газа равна сумме кинетической энергии U_k хаотического движения молекул и их взаимной потенциальной энергии $U_{п}$:

$$U = U_k + U_{п}. \quad (14.11)$$

В § 14.2 мы отмечали, что силы взаимного притяжения влияют на движение сравнительно небольшого числа молекул, находящихся

вблизи стенок сосуда с газом. Поэтому можно считать, что U_k моля реального газа совпадает с U_k моля соответствующего идеального газа при той же температуре. Напомним, что внутренняя энергия 1 моля идеального газа составляет $U_{ид} = c_V T$. Поскольку величина $U_{п}$ обусловлена силами, зависящими от расстояния между молекулами, то значение $U_{п}$ должно зависеть от среднего расстояния между молекулами. Это расстояние однозначно определяется молярным объемом V_m . Поэтому в изохорном процессе $U_{п} = \text{const}$, а тогда $dU_{п} = 0$. Обобщая сказанное, можно записать, что в изохорном процессе изменение внутренней энергии реального газа выражается так же, как для идеального газа:

$$dU = c_V dT. \quad (14.12)$$

Английские физики Д. Джоуль и У. Томсон экспериментально обнаружили, что при адиабатном расширении газа без совершения полезной работы температура газа изменяется. Процесс такого необратимого расширения называется **адиабатным дроселированием**, а явление изменения температуры в этом процессе — **эффектом Джоуля—Томсона**.

Схема опытов Джоуля и Томсона приведена на рис. 14.6. В хорошо теплоизолированную трубу вставлена пористая пробка C (дроссель). С помощью подвижных поршней B и D давления газа слева и справа от пробки поддерживаются постоянными и равными соответственно p_1 и p_2 ($p_1 > p_2$). Под действием перепада давления газ продавливается через пробку и при этом расширяется от давления p_1 до давления p_2 . Совершаемая газом работа расширения практически целиком расходуется на преодоление трения газа в пробке, а выделяющаяся при трении теплота $Q_{тр}$ нагревает газ.

По первому началу термодинамики изменение внутренней энергии газа при прохождении через дроссель равно $\Delta U = Q + A'$. Сообщаемая газу теплота Q из-за отсутствия теплообмена между газом и внешними телами равна $Q_{тр}$. Работа A' , совершаемая внешними

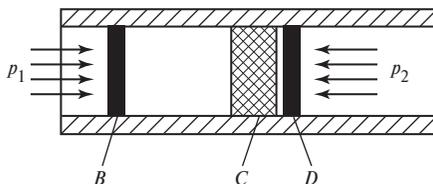


Рис. 14. 6

силами над газом, равна сумме работ поршня B (работа A'_1), поршня D (работа A'_2) и работы сил трения $A'_{\text{тр}}$: $A' = A'_1 + A'_2 + A'_{\text{тр}}$. Поскольку работа газа против сил трения $A_{\text{тр}} = -A'_{\text{тр}} = Q_{\text{тр}}$, то

$$\Delta U = A'_1 + A'_2. \quad (14.13)$$

Пусть газ занимает объем V_1 между поршнем B и дросселем при давлении p_1 . Тогда работа по вытеснению газа из этого объема

$$A'_1 = \int_0^{V_1} p_1 dV = p_1 V_1.$$

Аналогично, если V_2 — объем газа между дросселем и поршнем D при давлении p_2 , то

$$A'_2 = - \int_0^{V_2} p_2 dV = -p_2 V_2.$$

Знак « $-$ » в последней формуле показывает, что поршень D противодействует перетеканию газа через дроссель. Подставляя последние соотношения в (14.13) и учитывая (14.11), получаем

$$\frac{m}{\mu} c_V \Delta T + \Delta U_{\text{п}} = p_1 V_1 - p_2 V_2 = -\Delta(pV).$$

Следовательно, при адиабатном дросселировании изменение температуры реального газа

$$\Delta T = - \frac{\mu}{m} \frac{\Delta U_{\text{п}} + \Delta(pV)}{c_V}. \quad (14.14)$$

Формула (14.14) выражает интегральный эффект Джоуля—Томсона для реального газа. Для идеального газа $U_{\text{п}} = 0$, а поэтому

$$\Delta T = - \frac{\mu}{m} \frac{\Delta(pV)}{c_V} = - \frac{\Delta(RT)}{c_V} = - \frac{R}{c_V} \Delta T.$$

Это соотношение справедливо при $\Delta T = 0$, поэтому у идеальных газов эффект Джоуля—Томсона отсутствует.

Раздел III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

В третьей части курса общей физики рассмотрим электромагнитное взаимодействие тел. Опыт показывает, что между электрически заряженными телами, а также между телами, в которых существуют электрические токи, действуют *электродинамические* (или *электромагнитные*) силы.

Относительно природы этих сил в науке выдвигались две противоположные точки зрения. Более старая из них возникла в первой четверти XIX в. в трудах Кулона, Лапласа, Ампера, Пуассона, Гаусса, Вебера, Остроградского. Они рассматривали непосредственное действие заряженных тел одного на другое на расстоянии (теория дальнего действия). Основная идея этой теории была заимствована из учения Ньютона о всемирном тяготении. Громадные успехи небесной механики, с одной стороны, и полная невозможность объяснить тяготение, с другой — привели многих ученых к мысли, что силы гравитации, электрические и магнитные силы не нуждаются в объяснении. Задача теории электричества сводилась, таким образом, только к установлению элементарных законов действия магнитных и электрических сил, на основе которых объяснялись все явления. По своему содержанию и форме эти законы напоминали, а часто прямо копировали закон всемирного тяготения. Эта теория совершенно не рассматривала природу электромагнитных взаимодействий, хотя количественные выводы теории были прочно обоснованы и достоверны.

В 40-х годах XIX в. появилась новая гипотеза: взаимодействия между телами передаются с помощью электромагнитного поля, которое распространяется в пространстве с конечной скоростью (теория ближнего действия). Эту теорию развивали Фарадей, Максвелл, Герц. Максвелл облек основные идеи Фарадея в математическую форму. В 70-х годах XIX в. ему удалось сформулировать систему уравнений, которая позволяет описать все количественные законы электромагнитного поля.

При изучении электрических явлений часто возникает стремление «объяснить» электрическое поле, т.е. свести его к каким-либо иным, уже изученным явлениям, подобно тому, как тепловые явления мы сводим к беспорядочному движению атомов и молекул.

Однако многочисленные попытки такого рода в области электричества неизменно оканчивались неудачей. Все усилия физиков построить непротиворечивую механическую теорию электрических и магнитных явлений были несостоятельны. Электрическое поле — самостоятельная физическая реальность. Оно не может быть объяснено тепловыми или механическими явлениями. Электрические явления представляют собой новый класс явлений природы.

Для понимания сущности электродинамики Максвелла рассмотрим сначала простейшие опытные факты и явления, которые могут быть правильно описаны не только на языке теории поля, но и на языке теории дальнего действия. При обобщении законов этих явлений мы придем к результатам, которые могут быть истолкованы уже только с помощью теории ближнего действия, и, в конце концов, придем к системе уравнений Максвелла.

В этой части курса изучим основные понятия и общие принципы науки об электрических и магнитных явлениях; электрические и магнитные свойства вещества; технические и практические применения ряда физических явлений.

Глава 15

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Взаимодействие между электрически заряженными частицами или телами, движущимися произвольным образом относительно инерциальной системы отсчета, осуществляется посредством *электромагнитного поля*, которое представляет собой совокупность двух взаимосвязанных полей: *электрического и магнитного*.

Особенность электрического поля состоит в том, что сила его воздействия на электрически заряженное тело (или частицу) не зависит от скорости движения тела. Поэтому электрическое поле в пространстве удобно изучать по силовому действию на неподвижный электрический заряд.

Особенность же магнитного поля состоит в том, что сила его воздействия на движущиеся электрически заряженные тела (или частицы) зависит от скорости движения тела и направлена перпендикулярно этой скорости.

Электростатика — раздел науки об электричестве, изучающий взаимодействие электрических зарядов, неподвижных относительно друг друга и систем координат. *Электрическое поле, создаваемое заряженными телами, неподвижными относительно инерциальных систем отсчета, называется электростатическим полем.*

15.1. Электрический заряд и его свойства. Закон Кулона

Электрический заряд — физическая величина, определяющая интенсивность электрических взаимодействий. Электрический заряд — фундаментальное свойство материи. Заряд — инвариантная величина, не зависящая от скорости движения заряженного тела.

Экспериментально обнаружено существование двух типов электрических зарядов.

Положительно заряженными называют тела, которые действуют на другие заряженные предметы так же, как стекло, натертое кожей или шелком.

Отрицательно заряженными называют тела, которые действуют на другие заряженные предметы так же, как эбонит или янтарь, натертые шерстью.

Положительные и отрицательные заряды по-разному проявляют себя в парном взаимодействии: тела, обладающие зарядами одного типа, отталкиваются одно от другого, а тела, обладающие зарядами разных типов, притягиваются.

Поскольку электрический заряд — это мера воздействия на тело других заряженных тел или электрических полей, он всегда связан с материальным телом или частицей. Электрический заряд *дискретен*. Это означает, что существует минимальный электрический заряд (*элементарный заряд*), а электрический заряд любого тела может быть представлен как алгебраическая сумма целого числа элементарных зарядов. Элементарный положительный заряд — это заряд протона, а элементарный отрицательный заряд — это заряд электрона (в дальнейшем будем обозначать их p и e соответственно).

Для количественного измерения электрических зарядов в СИ существует единица измерения, называемая кулон (обозначается Кл). 1 Кл — это электрический заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за 1 с при силе тока в проводнике, равном 1 А. Понятие силы тока и определение его единицы в СИ введем позднее. Пока подчеркнем лишь то обстоятельство, что в СИ единица электрического заряда является не основной, а производной.

В результате точных электрических измерений было установлено, что $e = -1,6022 \cdot 10^{-19}$ Кл, $p = |e|$. Приведем здесь же значение отношения заряда электрона к его массе: $|e|/m = 1,7588 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Система тел или частиц называется *электрически изолированной*, если между ней и внешними телами нет обмена электрическими зарядами (заряженными частицами). В такой системе могут образовываться новые электрически заряженные частицы, например, элект-

роны при ионизации атомов и молекул. Однако всегда при этом рождаются частицы, заряды которых противоположны по знаку и в сумме равны нулю. Для электрически изолированной системы тел справедлив фундаментальный закон физики — **закон сохранения электрического заряда**: алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.

Силы взаимодействия неподвижных электрических зарядов подчиняются основному закону электростатического взаимодействия, который был экспериментально установлен Г. Кавендишем в 1773 г. Впервые этот закон был опубликован в 1785 г. Ш. Кулоном, который исследовал взаимодействие заряженных маленьких шариков с помощью крутильных весов. Такие шарики в опыте Кулона можно было считать материальными точками. Назовем электрически заряженную материальную точку *точечным электрическим зарядом*.

Закон Кулона утверждает, что *сила электростатического взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов, находящихся в вакууме, прямо пропорциональна произведению этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами и направлена вдоль прямой, их соединяющей, так, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются*. На рис. 15.1, а и б показаны силы взаимодействия между двумя положительными точечными зарядами q_1 и q_2 .

В векторном виде закон Кулона записывается следующим образом:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r}; \quad \vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}. \quad (15.1)$$

Здесь \vec{F}_{21} — сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 ; \vec{r}_{21} — радиус-вектор, соединяющий заряд q_2 с зарядом q_1 ($|\vec{r}_{21}| = r$); k — коэффициент пропорциональности; \vec{F}_{12} — сила,

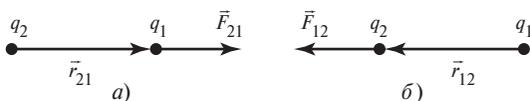


Рис. 15.1

действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 ; \vec{r}_{12} — радиус-вектор, соединяющий заряд q_1 с зарядом q_2 ($|\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_{12}|$).

Коэффициент пропорциональности k в формуле (15.1) зависит от выбора системы единиц. В СИ принято, что

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}^{-2}, \quad (15.2)$$

где ϵ_0 — коэффициент, определяемый из экспериментальных данных, называемый *электрической постоянной*:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \quad (15.3)$$

15.2. Напряженность электрического поля. Силловые линии

Наличие электрического поля в какой-либо точке пространства можно обнаружить по силовому действию поля на помещенный в эту точку заряд. Назовем *пробным электрическим зарядом* положительный точечный заряд настолько малый, что его внесение в поле не вызывает изменения значений и перераспределения в пространстве зарядов, создающих исследуемое поле.

Количественной характеристикой силового действия электрического поля на заряженные частицы и тела служит векторная величина \vec{E} — *напряженность электрического поля*. *Напряженность электрического поля равна отношению силы, действующей со стороны поля на неподвижный пробный электрический заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля, к этому заряду:*

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0. \quad (15.4)$$

Будем называть электрическое поле *однородным*, если во всех его точках векторы напряженности \vec{E} одинаковы, т.е. совпадают по модулю и направлению. Поле называется *неоднородным*, если в различных его точках напряженности различны, т.е. различаются по модулю или по направлению, или по модулю и направлению одновременно.

Сила, действующая со стороны электрического поля на помещенный в него произвольный точечный заряд, равна произведению заряда на напряженность электрического поля в данной точке:

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (15.5)$$

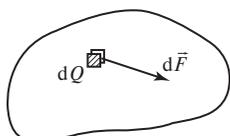


Рис. 15.2

При нахождении силы, действующей на заряженное тело конечных размеров, помещенное в неоднородное электрическое поле, необходимо разбить исследуемое заряженное тело на совокупность материальных точек, т.е. на совокупность точечных зарядов (рис. 15.2).

Элементарная сила, действующая на каждый точечный заряд dQ со стороны поля (здесь dQ — элемент заряда Q), $d\vec{F} = \vec{E} dQ$, где \vec{E} — напряженность поля в точке расположения заряда dQ . Сила, действующая на весь заряд Q , является результатом суммирования элементарных сил:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int \vec{E} dQ. \quad (15.6)$$

Интегрирование проводится по заряду тела.

Вычисление интеграла (15.6) оказывается достаточно простым, если электрический заряд распределен по всему заряженному телу непрерывно: вдоль некоторой линии, по поверхности или по объему. В этих случаях можно использовать понятия линейной, поверхностной и объемной плотностей зарядов (рис. 15.3).

Линейная плотность электрических зарядов $\tau = dQ/dl$ где dQ — заряд бесконечно малого участка заряженной линии (пример: стержень, нить) длиной dl (рис. 15.3, а). Поэтому полный заряд тела $Q = \int \tau dl$. Если заряд распределен по линии равномерно, то полный заряд тела $Q = \tau L$. Размерность линейной плотности зарядов в СИ: $[\tau] = \text{Кл/м}$.

Поверхностная плотность электрических зарядов $\sigma = dQ/dS$, где dQ — заряд бесконечно малого участка заряженной поверхности (пример: заряженная плоскость) площадью dS (рис. 15.3, б). Поэтому полный заряд тела $Q = \int \sigma dS$. При равномерном распределении заряда по поверхности полный заряд тела $Q = \sigma S$. Размерность поверхностной плотности зарядов в СИ: $[\sigma] = \text{Кл/м}^2$.

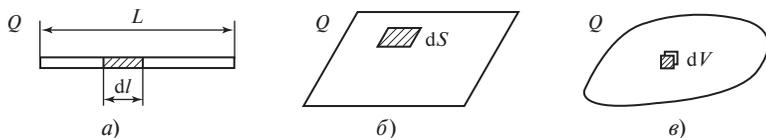


Рис. 15.3

Объемная плотность электрических зарядов $\rho = dQ/dV$, где dQ — заряд бесконечно малого объема заряженного тела (рис. 15.3, в).

Поэтому полный заряд тела $Q = \int \rho \, dV$. Если заряд распределен по телу равномерно, то полный заряд тела $Q = \rho V$. Размерность объемной плотности зарядов в СИ: $[\rho] = \text{Кл}/\text{м}^3$.

Пример 15.1. Рассчитаем напряженность поля точечного заряда Q (рис. 15.4).

Модуль силы, действующей со стороны такого поля на помещенный в него пробный заряд q_0 , $F = k \frac{Qq_0}{r^2}$ [см. формулу (15.1)], где r — расстояние от источника поля (заряда Q) до исследуемой точки поля (заряда q_0), отсчитываемое вдоль некоторой оси Or . Тогда согласно определению напряженности

$$E = \frac{F}{q_0} = k \frac{Q}{r^2}. \quad (15.7)$$

Направления векторов напряженности электрического поля в двух точках на выбранной оси Or показаны на рис. 15.4.

График зависимости проекции напряженности поля на выбранное направление оси от расстояния до точечного заряда $Q > 0$ ($E_r = f(r)$) представлен на рис. 15.5.

Графическое изображение электростатического поля с помощью векторов напряженности \vec{E} в различных точках пространства неудобно. Более наглядным оказался метод изображения электростатических полей с помощью силовых линий (линий напряженности), предложенный Фарадеем.

Силовая линия — воображаемая линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором напряженности поля в этой точке. Силовые линии электростатического поля изображают в соответствии с определенными правилами:



Рис. 15.4

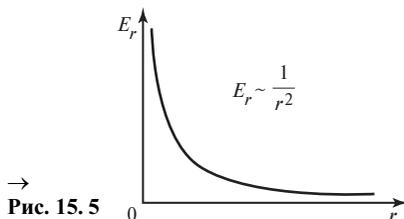


Рис. 15.5

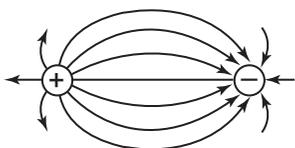


Рис. 15.6

1) силовая линия считается направленной так же, как вектор \vec{E} в рассматриваемой точке линии;

2) густота (близость одной к другой) силовых линий в окрестности какой-либо точки пропорциональна $|\vec{E}|$ в данной точке;

3) силовые линии начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах;

4) силовые линии не соприкасаются и не пересекаются, так как в каждой точке поля вектор \vec{E} имеет только одно определенное направление;

5) силовые линии непрерывны в области пространства, в которой отсутствуют электрические заряды.

Силовые линии электростатического поля системы двух разноименных одинаковых по модулю электрических зарядов, называемой *электрическим диполем*, изображены на рис. 15.6.

15.3. Суперпозиция электростатических полей

При рассмотрении электростатического поля произвольной системы неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n было экспериментально показано, что результирующая сила \vec{F} , действующая на пробный заряд q в любой точке поля, равна геометрической сумме сил, действующих на заряд q со стороны каждого из зарядов q_i в отдельности:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (15.8)$$

Из (15.8) легко получить, что

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (15.9)$$

Последнее соотношение выражает *принцип суперпозиции электрических полей (принцип независимости действия электрических полей)*: напряженность электрического поля, созданного системой зарядов в любой точке пространства, равна векторной сумме напряженности полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности.

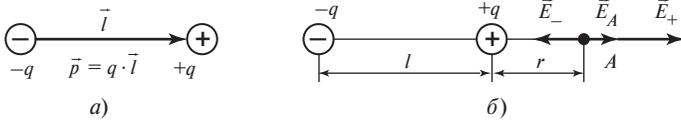


Рис. 15.7

Рассмотрим применение этого принципа для расчета напряженности поля системы дискретно и непрерывно распределенных зарядов.

Пример 15.2. Для электрического диполя (рис. 15.7, а) введем понятие вектора *электрического дипольного момента*: $\vec{p} = q \vec{l}$. Эта величина определяется произведением положительного заряда диполя q на плечо диполя \vec{l} . Здесь \vec{l} — вектор, направленный от отрицательного заряда диполя к положительному, причем l — расстояние между зарядами. Для расчета модуля напряженности поля в любой точке A на оси диполя (рис. 15.7, б) воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_-; \quad E_A = E_+ - E_- = kq \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right).$$

При условии $r \gg l$ последнее равенство приводится к виду $E_A = kq \frac{2l}{r^3} = 2k \frac{p}{r^3}$. Поскольку в этом примере $E_+ > E_-$, то

$$\vec{E}_A \uparrow \vec{E}_+ \Rightarrow \vec{E}_A \uparrow \vec{p}, \text{ поэтому } \vec{E}_A = 2k \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

Расчет напряженности поля в точках, лежащих на серединном перпендикуляре к оси диполя (рис. 15.8), при том же условии $r \gg l$ дает другой результат:

$$E_D = |\vec{E}_+ + \vec{E}_-| = 2E_+ \sin \frac{\alpha}{2} \approx E_+ \alpha = E_+ \frac{l}{r} = k \frac{q}{r^2} \frac{l}{r} = k \frac{p}{r^3}.$$

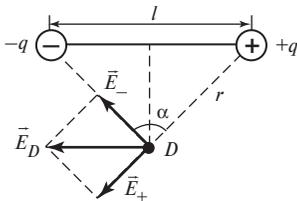


Рис. 15.8

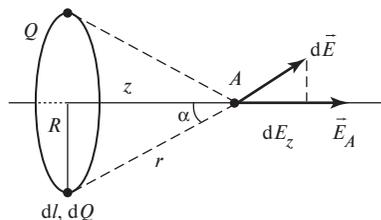


Рис. 15.9

Однако $\vec{E}_D \neq k \frac{Q}{r^3}$, так как $\vec{E}_D \uparrow \downarrow \vec{p}$.

Пример 15.3. Определим напряженность поля, созданного электрическим зарядом Q , непрерывно распределенным по однородному проволочному кольцу радиусом R , на оси кольца в точке A , удаленной на расстояние z от плоскости расположения кольца (рис. 15.9).

Разобьем кольцо на элементарные отрезки длиной dl . Тогда на каждом таком элементе кольца будет находиться элементарный заряд $dQ = \tau dl = \frac{Q}{2\pi R} dl$. Этот электрический заряд создает в точке A электрическое поле напряженностью $d\vec{E}$, причем $dE = k \frac{dQ}{r^2} = k \frac{dQ}{R^2 + z^2}$. Вектор $d\vec{E}$ показан на рис. 15.9. Поскольку $\vec{E}_A = \int d\vec{E}$, то из условия симметрии очевидно, что

$$E_A = \int dE_z = \int dE \cos \alpha = \int dE \frac{z}{r} = \int dE \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Окончательно получаем:

$$E_A = \int k \frac{dQ}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \int_0^{2\pi R} k \frac{Q}{2\pi R} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dl = k \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

15.4. Работа сил электростатического поля. Разность потенциалов. Потенциал

Силы электростатического взаимодействия являются центральными, а, следовательно, консервативными. Таким образом, электростатическое поле является потенциальным. Определим работу сил электростатического поля, созданного зарядом Q_1 , по перемещению точечного заряда Q_2 из точки 1 в точку 2 (рис. 15.10).

Элементарная работа сил потенциального поля по перемещению заряда на расстояние $d\vec{l}$: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q_2 E dl \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{l}}) = Q_2 E dr$. Тогда

$$A = Q_2 \int E dr = Q_2 \int_{r_1}^{r_2} k \frac{Q_1}{r^2} dr = k Q_1 Q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (15.10)$$

Если заряды одноименны, то поле совершает положительную работу по их удалению одного от другого и отрицательную работу по их сближению.

Соотношение (15.10) показывает, что работа сил электростатического поля по перемещению заряда не зависит от формы траектории движения заряда, а определяется только положением начальной и конечной точек траектории. Итак, кулоновские силы консервативны, поэтому *циркуляция напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю*: $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$.

Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы электростатическое поле было потенциальным. Тогда справедлива связь работы консервативной силы и изменения потенциальной энергии, т.е. работа сил электростатического поля равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = -dW_{\text{пот}} \Rightarrow A = W_1 - W_2. \quad (15.11)$$

Рассмотрим отношение работы поля по перемещению пробного заряда из одной точки пространства в другую к величине переносимого заряда:

$$\frac{A_{12}}{Q_2} = \frac{W_1 - W_2}{Q_2} = \int_1^2 E dr. \quad (15.12)$$

Поскольку полученное отношение не зависит от переносимого заряда и траектории его перемещения, то данная величина может быть принята в качестве характеристики электростатического поля. *Разностью потенциалов между двумя точками электростатического поля называется отношение работы сил поля по перемещению*

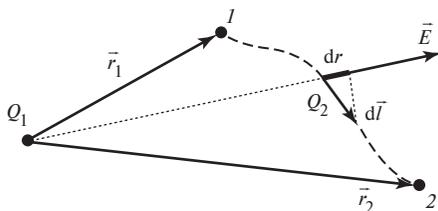


Рис. 15.10

пробного электрического заряда из одной точки в другую к значению этого заряда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{Q_2} = \frac{W_1 - W_2}{Q_2}. \quad (15.13)$$

С учетом (15.12) и (15.13) получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E \, dr, \quad (15.14)$$

$$A_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)Q_2. \quad (15.15)$$

Введем теперь понятие *потенциала* точки электростатического поля. Из (15.13) следует, что $\varphi_1 = W_1/Q_2$; $\varphi_2 = W_2/Q_2$.

Потенциалом точки электростатического поля называется энергетическая характеристика поля, равная отношению потенциальной энергии пробного электрического заряда, помещенного в данную точку поля, к значению этого заряда.

Ранее было отмечено, что потенциальная энергия — физическая величина, которая определена с точностью до некоторого произвольного значения. Следовательно, потенциал электрического поля также определен с точностью до произвольного значения, поэтому в любой точке пространства можно принять его значение, в частности, равным нулю. Если значение потенциальной энергии и соответственно потенциала в точке 2 принять равными нулю, то потенциал точки 1 согласно (15.14)

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{l}; \quad (\varphi_2 = 0). \quad (15.16)$$

Таким образом, потенциал любой точки электростатического поля численно равен удельной работе (работе, отнесенной к значению заряда), совершаемой силами поля при перемещении пробного заряда из этой точки в ту точку, в которой потенциал поля условно принят равным нулю. Выбор точки с нулевым потенциалом произволен и определяется удобством решения каждой конкретной задачи. Рассмотрим это на некоторых примерах.

Пример 15.4. Определим потенциал произвольной точки пространства, удаленной на расстояние r от точечного заряда Q (рис. 15.11).

Выберем точку, потенциал которой примем равным нулю. Пусть это будет точка, бесконечно удаленная от заряда Q . Поскольку работа по переносу пробного заряда из данной точки в бесконечность не зависит от формы траектории движения, то рассмотрим такое движение пробного заряда, при котором $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ (т.е. вдоль прямой, совпадающей с осью Or).

Тогда при условии $\varphi(\infty) = 0$ получаем зависимость потенциала поля точечного заряда от расстояния $\varphi = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty E \, dr = \int_r^\infty k \frac{Q}{r^2} \, dr = k \frac{Q}{r}$. График функции $\varphi(r)$ показан на рис. 15.12.

Пример 15.5. Рассмотрим электростатическое поле, созданное системой точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n . Тогда потенциал произвольной точки пространства $\varphi = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$, при этом $\varphi_2 = 0$. Вектор напряженности поля \vec{E} в данной точке рассчитываем по принципу суперпозиции (15.9) и находим искомый потенциал как алгебраическую сумму потенциалов: $\varphi = \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \varphi_i$.

Сформулируем полученный вывод: *потенциал поля, созданного в данной точке системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности, т.е.*

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (15.17)$$



Рис. 15.11

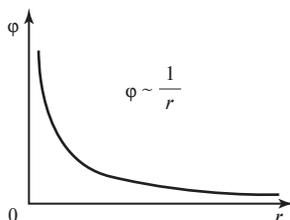


Рис. 15.12

При рассмотрении поля, созданного непрерывно распределенным в пространстве зарядом, необходимо выполнить следующую последовательность действий:

- 1) выделить в объекте элемент заряда dQ , который в условиях данной задачи можно считать точечным;
- 2) выразить потенциал $d\varphi$ поля этого заряда в рассматриваемой точке;
- 3) определить потенциал в заданной точке пространства:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad \text{или} \quad \varphi = \int_Q d\varphi.$$

15.5. Связь напряженности и потенциала. Градиент скалярного поля

Выясним физический смысл взаимосвязи напряженности (силовой характеристики электростатического поля) и потенциала (энергетической характеристики). Соотношение

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{l} ; \quad (\varphi_2 = 0)$$

позволяет по заданной зависимости напряженности произвольной точки поля от ее координат найти зависимость потенциала этой точки от координат и, как следствие, рассчитать потенциал поля в любой точке. При этом потенциал произвольной точки поля определяется напряженностью поля на всем пути от этой точки до точки, где значение потенциала условно принято за нуль. Данное соотношение носит название *интегральной связи напряженности и потенциала электростатического поля*.

Из соотношения (15.14) следует, что $\vec{E} \, d\vec{l} = -d\varphi$. Левая часть равенства представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ и $d\vec{l} = \vec{i} \, dx + \vec{j} \, dy + \vec{k} \, dz$, поэтому

$$\vec{E} \, d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz.$$

Поскольку бесконечно малое приращение потенциала $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$, то для проекций вектора \vec{E} получаем:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Таким образом,

$$\vec{E} = - \text{grad } \varphi. \quad (15.18)$$

Последнее равенство можно записать иначе — в операторной форме:

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} \varphi, \quad (15.19)$$

где $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$; $\vec{\nabla}$ носит название *оператора Гамильтона*.

Выражения (15.18) или (15.19) определяют *дифференциальную связь напряженности и потенциала электростатического поля*. Они позволяют по известной зависимости потенциала от координат определить зависимость напряженности поля от координат и найти напряженность поля в любой точке. Поскольку градиент скалярной функции — это вектор, направленный в сторону ее наибольшего возрастания, то из (15.19) следует, что вектор напряженности электрического поля направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала. Поэтому и силовые линии поля направлены в сторону убывания потенциала.

Если известны значения потенциала в различных точках пространства, то через точки с одинаковыми значениями потенциала можно провести поверхности, которые называются *эквипотенциальными*. Графически представляя электростатическое поле на плоском листе бумаги, будем изображать линии пересечения этих поверхностей с плоскостью листа в виде *эквипотенциальных линий* (эквипотенциалей). Докажем, что силовые линии перпендикулярны эквипотенциалам.

Разность потенциалов между двумя точками пространства (рис. 15.13) согласно (15.14) $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{l}$. Если эти точки при-

надлежат одной эквипотенциали, то $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, а вектор $d\vec{l}$ направлен вдоль эквипотенциали. Равенство скалярного произведения $\vec{E} \, d\vec{l}$ нулю возможно лишь при $(\vec{E}, d\vec{l}) = \pi/2$. Следовательно, соотношение (15.19) позволяет по заданному распределению потенциала поля в пространстве восстановить картину его силовых линий (рис. 15.14).

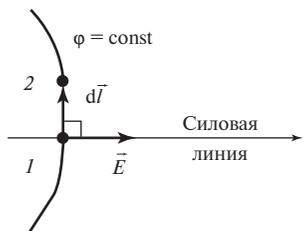


Рис. 15.13

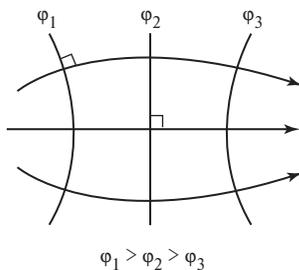


Рис. 15.14

15.6. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Ранее были введены две физические величины, характеризующие электрическое поле, — напряженность и потенциал. Принцип суперпозиции (15.9) и соотношение (15.17) позволяют рассчитать эти величины для заданной системы зарядов в пространстве независимо одну от другой, а интегральная и дифференциальная связь между ними (15.16) и (15.18) дают возможность определить одну из величин, зная другую. Однако практическое вычисление интегралов (15.9) и (15.16) может быть весьма затруднительным.

Рассмотрим иной метод определения напряженности электростатического поля — метод, основанный на использовании теоремы Гаусса.

Для рассмотрения этой теоремы введем понятие потока вектора напряженности. Проведем в электрическом поле произвольную поверхность площадью S (рис. 15.15). Назовем *элементарным потоком вектора напряженности электростатического поля* через малый участок (элемент) поверхности dS величину

$$d\Phi = \vec{E} \, d\vec{S} = E \, dS \cos(\widehat{E, d\vec{S}}) = E \, dS \cos(\widehat{E, \vec{n}}), \quad (15.20)$$

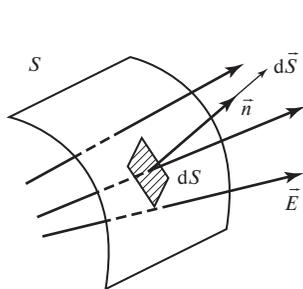


Рис. 15.15

где $d\vec{S}$ — вектор площади элемента поверхности; \vec{n} — единичный вектор нормали к поверхности в месте расположения элемента dS . Справедливы соотношения: $d\vec{S} = \vec{n} \, dS$; $|d\vec{S}| = |\vec{n}| \, dS = dS$. Малый элемент поверхности dS выбирается таких размеров, чтобы в его пределах можно было считать поле однородным, а кривизну поверхности можно было бы не учитывать.

Поток вектора напряженности электростатического поля через всю поверхность S находится как алгебраическая сумма потоков сквозь все малые участки этой поверхности:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (15.21)$$

При вычислениях по формуле (15.21) договоримся направлять все векторы \vec{n} в одну и ту же сторону по отношению к поверхности S . Например, для замкнутой поверхности S в дальнейшем будем считать векторы \vec{n} внешними нормальными к поверхности, т.е. направленными из области, ограниченной этой поверхностью.

Из (15.21) следует, что $\Phi = 0$, если во всех точках поверхности S силовые линии поля перпендикулярны векторам \vec{n} , т.е. «скользят» по поверхности. В то же время поток максимален, если поверхность S расположена перпендикулярно силовым линиям в каждой точке пространства. Таким образом, *поток вектора напряженности через поверхность пропорционален числу силовых линий, пересекающих эту поверхность.*

Вспомним понятие телесного угла. Это часть пространства, ограниченная прямыми, проведенными из одной точки (вершины угла) ко всем точкам замкнутой кривой (рис. 15.16). Мерой телесного угла является отношение площади элемента dS_n , вырезаемого телесным углом на сфере радиусом r с центром в вершине угла, к квадрату радиуса:

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}.$$

Единицей телесного угла в СИ служит угол, опирающийся на сферу радиусом 1 м и вырезающий на ней элемент площадью 1 м². Такой телесный угол равен 1 стерadianу (обозначается 1 ср). Поскольку пло-

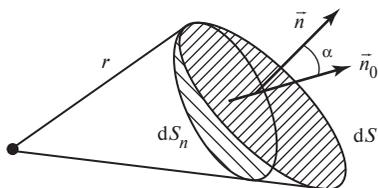


Рис. 15.16

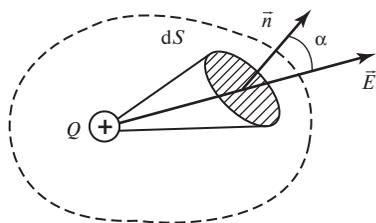


Рис. 15.17

щадь поверхности всей сферы равна $4\pi r^2$, то телесный угол, опирающийся на всю сферу, равен 4π ср.

Рассмотрим точечный заряд Q , охваченный произвольной замкнутой поверхностью (рис. 15.17).

Выделим на этой поверхности элемент площадью dS , «вырезанный» из нее телесным углом $d\Omega$ с вершиной в заряде. Элементарный поток вектора напряженности поля точечного заряда через элемент dS согласно (15.20) в СИ запишем следующим образом:

$$d\Phi = E dS \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Полный поток вектора напряженности через замкнутую поверхность

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = \oint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (15.22)$$

Интегрирование производится по замкнутой поверхности. Если произвольная замкнутая поверхность охватывает точечные заряды Q_1, Q_2, \dots, Q_n , то можно составить систему уравнений:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} &= \frac{Q_1}{\epsilon_0}; \\ \dots \\ \oint_S \vec{E}_n d\vec{S} &= \frac{Q_n}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

где \vec{E}_i — напряженность поля каждого из зарядов. Складывая уравнения приведенной выше системы, получаем:

$$\sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^n \vec{E}_i d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0}. \quad (15.23)$$

Итак, если электрические заряды находятся внутри замкнутой поверхности, то поток вектора напряженности через эту поверхность пропорционален алгебраической сумме этих зарядов.

Рассмотрим теперь точечный заряд $Q > 0$, расположенный вне произвольной замкнутой поверхности (рис. 15.18).

В этом случае касательная коническая поверхность с вершиной в точке расположения заряда разбивает поверхность S на две части: S_1

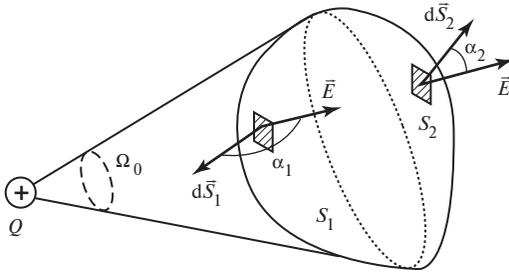


Рис. 15. 18

и S_2 . Полный поток напряженности через всю поверхность S равен алгебраической сумме потоков через эти части:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Для всех элементов поверхности S_1 углы между векторами \vec{E} и внешними нормальми \vec{n} (при $Q > 0$) — тупые; для всех элементов поверхности S_2 — острые. Следовательно,

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} E dS \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}) < 0; \quad (15.24)$$

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_2} E dS \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}) > 0.$$

Поскольку поверхности S_1 и S_2 видны из точки расположения заряда Q под одним и тем же телесным углом Ω_0 , то согласно (15.22)

$$|\Phi_1| = |\Phi_2| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_0. \text{ Отсюда с учетом (15.24) получаем}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0. \quad (15.25)$$

Обобщим полученные результаты. Поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов, охваченных этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \text{ охв}}{\epsilon_0}. \quad (15.26)$$

Полученное утверждение называется *теоремой Гаусса для электростатического поля в вакууме*. Замкнутую поверхность S , фигурирующую в формулировке теоремы, часто называют *гауссовой поверхностью*. Отметим, что коэффициент пропорциональности между потоком напряженности и суммой зарядов, охваченных этой поверхностью, определен выбором системы единиц физических величин. В СИ этот коэффициент равен $1/\epsilon_0$. В других системах единиц он принимает другие значения.

15.7. Примеры использования теоремы Гаусса

Теорему Гаусса (15.26) удобно использовать для расчета напряженности электростатических полей, созданных симметричными системами зарядов. В этих случаях можно так выбрать гауссову поверхность, что поток вектора напряженности поля через нее легко выражается с помощью искомого значения модуля напряженности. Решение задачи о нахождении напряженности электростатического поля в какой-либо точке пространства осуществляется в несколько этапов.

1. Исходя из симметрии распределения заданной системы зарядов в пространстве, построить силовые линии поля, т.е. определить направление вектора \vec{E} в любой точке пространства.

2. Выбрать «удобную» замкнутую гауссову поверхность, отвечающую следующим требованиям:

- а) она должна проходить через исследуемую точку;
- б) площадь поверхности должна быть известна;
- в) модуль напряженности поля должен быть постоянен в точках всей поверхности или хотя бы ее части;
- г) угол между \vec{E} и внешней нормалью к поверхности должен быть известен в любой точке поверхности (это обеспечивается выполнением п. 1).

3. Получить выражение для потока напряженности поля через выбранную поверхность. Если выполнено условие п. 2в, то

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_1 \int_{S_1} \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}) dS + E_2 \int_{S_2} \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}) dS + \dots + \dots + E_N \int_{S_N} \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}) dS,$$

где E_i — постоянный модуль напряженности поля во всех точках части поверхности S_i .

4. Определить алгебраическую сумму зарядов, охваченных поверхностью S .
5. Применить теорему, т.е. приравнять результаты, полученные в пп. 3 и 4, с учетом коэффициента пропорциональности.

Пример 15.6. Определим напряженность электростатического поля во всех точках пространства, если электрический заряд $Q > 0$ равномерно распределен в пространстве в виде шара радиусом R .

1. Исходя из условий симметричного распределения заряда, изобразим силовые линии его электрического поля. Поскольку данное распределение заряда обладает сферической симметрией, силовые линии поля будут исходить из центра шара по радиальным направлениям (на рис. 15.19 показаны только четыре силовые линии).

Кроме того, исходя из симметрии системы, можно утверждать, что модуль напряженности поля во всех точках, равноудаленных от центра шара, должен быть одинаковым. Это справедливо, например, для точек A и B (рис. 15.19), находящихся на одинаковом расстоянии от центра симметрии системы.

Следовательно, направление и модуль вектора \vec{E} будут зависеть только от радиальной координаты исследуемой точки пространства. Для задания такой координаты r выберем произвольную радиальную ось Or , выходящую из центра шара.

2. Определим напряженность поля в произвольной точке C , находящейся внутри шара на расстоянии r от его центра. Для этого в качестве гауссовой поверхности выберем сферическую поверхность радиусом r , центр которой совпадает с центром заряженного шара. На рис. 15.20 штриховой окружностью радиусом r показана линия пересечения этой поверхности с плоскостью чертежа.

Следствием симметрии системы является равенство модуля вектора напряженности поля во всех точках поверхности, и равенство угла между \vec{E} и внешней нормалью к поверхности во всех точках поверхности нулю.

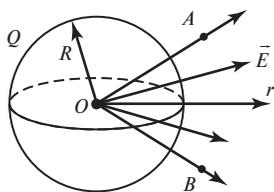


Рис. 15. 19

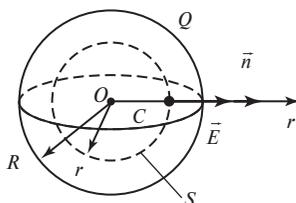


Рис. 15. 20

3. Определим поток вектора \vec{E} через гауссову поверхность:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}) dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2. \quad (15.27)$$

4. Определим алгебраическую сумму зарядов, охваченных поверхностью S . В данном случае электрический заряд, охваченный гауссовой поверхностью, — это *часть* всего заряда. Определим эту часть заряда через объемную плотность заряда и объем, ограниченный гауссовой поверхностью:

$$Q_{\text{охв}} = \rho V_{\text{охв}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}. \quad (15.28)$$

5. Применим теорему Гаусса, приравняв (15.27) и (15.28) с учетом коэффициента $1/\epsilon_0$:

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Qr^3}{R^3}.$$

Отсюда получим, что при $r < R$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}. \quad (15.29)$$

Применим эту процедуру для определения напряженности поля вне шарового скопления заряда. Выберем гауссову поверхность в виде сферы радиусом $r > R$, проходящей через произвольную точку D , находящуюся вне зарядов. На рис. 15.21 штриховой окружностью радиусом r показана линия пересечения этой поверхности с плоскостью чертежа.

Выражение для потока вектора \vec{E} через гауссову поверхность сохранит прежний вид (15.27). Заряд, охваченный поверхностью, представляет собой полный заряд шара: $Q_{\text{охв}} = Q$. Согласно теореме

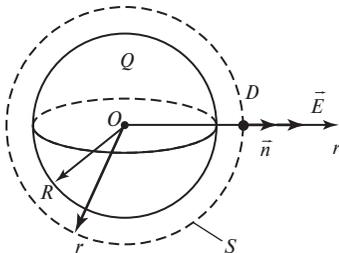


Рис. 15.21

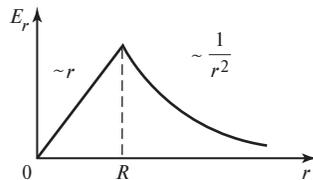


Рис. 15.22

Гаусса получим, что при $r > R$ имеет место соотношение $E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q$. Откуда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (15.30)$$

Окончательный вид зависимости модуля напряженности от координаты r можно представить так:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} & \text{при } r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

При построении графической зависимости $E(r)$ (рис. 15.22) обратим внимание на то, что выражения (15.29) и (15.30) дают одинаковые значения модуля напряженности поля при $r = R$:

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Пример 15.7. Определим напряженность электростатического поля во всех точках пространства, если электрический заряд равномерно распределен с поверхностной плотностью $\sigma > 0$ по поверхности весьма длинного цилиндра с радиусом основания R .

1. Определим из условий симметрии и изобразим графически линии напряженности электрического поля. Поскольку данное распределение заряда обладает осевой симметрией, силовые линии поля (если поле существует) будут исходить из точек оси цилиндра по радиальным направлениям (на рис. 15.23 показаны четыре силовые линии электрического поля).

Вследствие осевой симметрии системы, модуль напряженности поля во всех точках, равноудаленных от оси системы, должен быть одинаковым: такие точки, как, например, точки A и B , находятся на одинаковом расстоянии от оси симметрии системы.

Следовательно, направление и модуль вектора \vec{E} будут зависеть только от радиальной координаты исследуемой точки пространства. Для задания такой координаты r выберем произвольную радиальную ось Or , направленную перпендикулярно оси цилиндра.

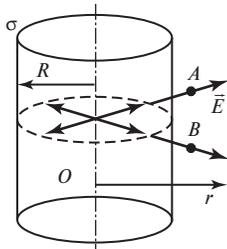


Рис. 15.23

2. Определим напряженность поля в произвольной точке C , находящейся вне цилиндра и имеющей координату $r > R$. Для этого выберем замкнутую поверхность S в виде поверхности цилиндра высотой H и радиусом r , ось которого совпадает с осью заряженного цилиндра (рис. 15.24).

Модуль напряженности поля постоянен во всех точках боковой поверхности цилиндра, вследствие симметрии системы. Угол между \vec{E} и внешней нормалью к поверхности во всех точках боковой поверхности цилиндра равен нулю, а во всех точках верхнего и нижнего оснований гауссова цилиндра равен $\pi/2$.

3. Определим поток вектора напряженности через замкнутую поверхность S .

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_1 \int_{S_1} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_1) dS + E_2 \int_{S_2} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_2) dS + E_3 \int_{S_3} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_3) dS,$$

где S_1 — площадь верхнего основания цилиндра; S_2 — площадь нижнего основания цилиндра; S_3 — площадь боковой поверхности цилиндра; $d\vec{S}_1, d\vec{S}_2, d\vec{S}_3$ — векторы соответствующих элементарных площадок. Учитывая соображения, изложенные при осуществлении этапа 2, получаем:

$$E_1 \int_{S_1} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_1) dS = E_2 \int_{S_2} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_2) dS = 0;$$

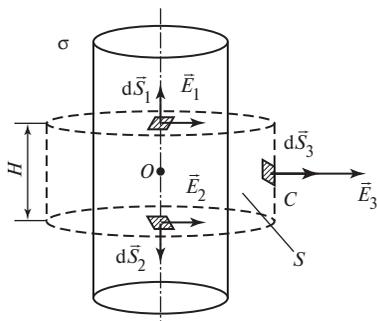


Рис. 15.24

$$E_3 \int_{S_3} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_3) dS = E_3 S_3.$$

Таким образом,

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_3 S_3 = E 2\pi r H. \quad (15.31)$$

4. Определим алгебраическую сумму зарядов, охваченных поверхностью гауссова цилиндра. В данном случае электрический заряд, попавший внутрь гауссовой поверхности, — это часть полного заряда цилиндра. Эту часть можно найти, умножив площадь боковой поверхности заряженного цилиндра, охваченного гауссовой поверхностью, на поверхностную плотность заряда:

$$Q_{\text{охв}} = \sigma 2\pi r H. \quad (15.32)$$

5. Приравняв (15.31) и (15.32) с учетом коэффициента $1/\epsilon_0$, имеем: $E 2\pi r H = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma 2\pi r H$. Отсюда следует, что $E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$.

Повторим все действия для определения напряженности поля внутри заряженного цилиндра. В этом случае выберем гауссову поверхность в виде цилиндрической поверхности, боковая поверхность, которой проходит через произвольную точку D , находящуюся на расстоянии $r < R$ (рис. 15.25).

Выражение для потока \vec{E} через гауссову поверхность сохранит прежний вид (15.31). Но в этом случае внутри гауссовой поверхности нет зарядов, поэтому $E 2\pi r H = \frac{1}{\epsilon_0} 0$ откуда следует $E = 0$.

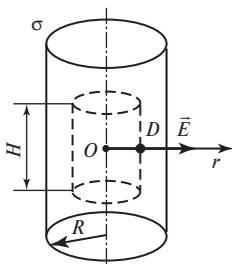


Рис. 15.25

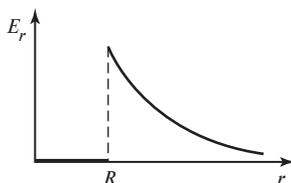


Рис. 15.26

Окончательно зависимость модуля напряженности от радиальной координаты можно представить следующим образом:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R; \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

График полученной зависимости изображен на рис. 15.26. Видно, что при значении $r = R$ график имеет разрыв. Отсюда, в частности, можно сделать вывод, что *при переходе через поверхность, заряженную с поверхностной плотностью заряда σ , модуль вектора напряженности электрического поля изменяется скачком на $\Delta E = \sigma/\varepsilon_0$.*

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Диэлектриками называют вещества, которые при обычных условиях практически не проводят электрический ток. В диэлектриках нет свободных носителей зарядов — заряженных частиц, которые под действием электрического поля могли бы прийти в упорядоченное движение и создать электрический ток проводимости. К диэлектрикам относятся все газы (если они не подверглись ионизации), некоторые жидкости и твердые тела. Удельное электрическое сопротивление диэлектриков $\rho \approx 10^6 \dots 10^{15}$ Ом·м, тогда как у металлов $\rho \approx 10^{-8} \dots 10^{-6}$ Ом·м. Особенности поведения диэлектриков в электростатических полях объясняются прежде всего их молекулярным строением. Электрически заряженные элементарные частицы, входящие в состав молекул диэлектриков, достаточно прочно связаны одна с другой внутриатомными силами. Электрические заряды частиц, входящих в состав атомов и молекул, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой, называются **связанными зарядами**. Заряды частиц, не входящих в состав атомов и молекул вещества, называются **свободными**. Это заряды частиц, способных перемещаться под действием электрического поля (свободные электроны в металлах и полупроводниках, ионы в электролитах и газах, электроны и ионы в плазме), положительные заряды ионов кристаллической решетки металлов, избыточные заряды, сообщенные проводящему телу. Рассмотрение поведения диэлектриков в электростатических полях мы начнем с изучения характеристик связанных зарядов.

16.1. Диполь в электростатическом поле.

Поляризация диэлектриков. Типы диэлектриков

Все молекулы диэлектрика электрически нейтральны: суммарный заряд электронов и атомных ядер в составе молекул равен нулю. Но молекула обладает электрическими свойствами: ее можно рассматривать как электрический диполь с дипольным моментом $\vec{p} = q\vec{l}$, где q — положительный заряд всех атомных ядер молекулы, а \vec{l} — вектор, проведенный из «центра тяжести» электронного облака в

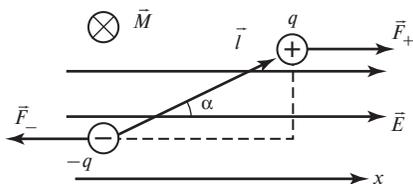


Рис. 16.1

молекуле в «центр тяжести» положительных зарядов атомного ядра (рис. 16.1).

Рассмотрим поведение молекулярного диполя в однородном электрическом поле. На заряды диполя в поле будет действовать пара сил:

$$\vec{F}_+ = q\vec{E}; \quad \vec{F}_- = -q\vec{E},$$

причем

$$|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-| = qE. \quad (16.1)$$

Возникшая пара сил, действуя совместно на заряды диполя, будет создавать вращающий момент $M = M_+ + M_- = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha$;

направление вектора \vec{M} указано на рис. 16.1 (он перпендикулярен плоскости рисунка). В векторном виде

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (16.2)$$

Действие момента сил будет приводить к повороту диполя таким образом, чтобы направления векторов дипольного момента и напряженности электрического поля совпали.

Этот же результат можно получить из энергетических представлений. Суммарная потенциальная энергия зарядов диполя

$$W = W_+ + W_- = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

где φ_+ и φ_- — потенциалы точек расположения положительного и отрицательного заряда диполя соответственно. Учитывая связь напряженности поля и разности потенциалов (15.14) для однородного поля, получаем $W = -pE \cos \alpha$.

Действие электрических сил приводит диполь в состояние устойчивого равновесия, когда его потенциальная энергия минимальна, т.е. $\cos \alpha = 1$, $\alpha = 0$, $\vec{p} \parallel \vec{E}$.

При внесении диполя в неоднородное электрическое поле, напряженность которого в разных точках пространства различна, силы, действующие на заряды диполя, будут не равны одна другой:

$|\vec{F}_+| \neq |\vec{F}_-|$. Проекция на ось x (рис. 16.1) результирующей силы, действующей на диполь,

$$F_x = q(E_1 - E_2) = q \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x = q \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha,$$

где E_1 и E_2 — модули напряженности поля в точках расположения зарядов диполя. Таким образом, в неоднородном поле на диполь будет действовать сила $\vec{F} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E = \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E})$.

Из-за теплового движения дипольные моменты молекул любого диэлектрика, не внесенного в поле, ориентированы беспорядочно, так что суммарный дипольный момент молекул такого диэлектрика в любом его объеме равен нулю.

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле происходит **поляризация диэлектрика**, заключающаяся в том, что в любом малом его объеме ΔV возникает отличный от нуля суммарный дипольный электрический момент молекул. Диэлектрик, находящийся в таком состоянии, называется **поляризованным**. Объем ΔV предполагается во много раз большим объема одной молекулы. В то же время объем выбирается настолько малым, чтобы внешнее поле в этом объеме можно было бы считать однородным. Тем не менее в таком объеме число молекул достаточно велико, и к ним применим статистический метод.

В **неполярных диэлектриках** (диэлектриках с неполярными молекулами) при отсутствии внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах совпадают, и дипольные моменты равны нулю. Таковы, например, молекулы O_2 , H_2 , N_2 и др. Во внешнем электрическом поле происходит деформация электронных оболочек атомов, при этом возникает множество диполей. Однако при снятии внешнего поля происходит восстановление прежней структуры молекул, исчезает деформация электронных оболочек и, как следствие, исчезают диполи. **Электронная поляризация** обусловлена упругим смещением и деформацией электронных оболочек. Электрическое поле действует на такую молекулу так, как если бы положительные и отрицательные заряды в ней были бы связаны упругими силами. Молекула ведет себя как упругий диполь.

Определим индуцированный дипольный электрический момент молекулы во внешнем поле. Для примера рассмотрим атом водорода,

в котором электрон вращается по круговой орбите радиусом R под действием кулоновской силы притяжения к ядру:

$$m\omega^2 R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (16.3)$$

где m — масса электрона, ω — его угловая скорость при движении по орбите. Во внешнем поле напряженностью \vec{E} на электрон действует сила $F_1 = eE$, вызывающая смещение орбиты на расстояние Δl (рис. 16.2).

Будем считать, что смещение плоскости орбиты из исходного положения настолько мало, что не вызывает изменения ее радиуса. Движение электрона по орбите в возмущенном состоянии будет определять сумма сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, где $F_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Как видно из

рис. 16.2, $\frac{\Delta l}{R} = \frac{F_1}{F} = \frac{eE}{m\omega^2 R}$; $\Delta l = \frac{eE}{m\omega^2}$.

С учетом (16.3) получим

$$\Delta l = \frac{E}{e} 4\pi\epsilon_0 R^3. \quad (16.4)$$

Дипольный момент молекулярного диполя, созданного внешним электрическим полем с напряженностью \vec{E} ,

$$p = e\Delta l = 4\pi\epsilon_0 R^3 E. \quad (16.5)$$

Отметим, что модуль дипольного момента пропорционален модулю напряженности внешнего поля, а направление вектора \vec{p} совпадает с направлением \vec{E} , т.е.

$$\vec{p} = \epsilon_0 \beta \vec{E}, \quad (16.6)$$

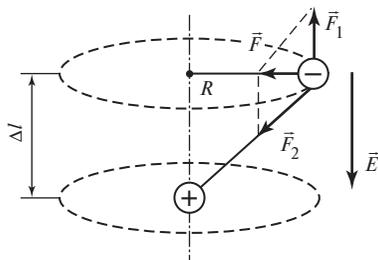


Рис. 16.2

где коэффициент пропорциональности β называется *поляризуемостью молекулы*. Он зависит от ее размера и является постоянным для рассматриваемого диэлектрика. Тепловое движение неполярных молекул не влияет на возникновение у них дипольных моментов, поэтому поляризуемость не зависит от температуры. Соотношение (16.6) может быть получено и для молекул с бóльшим числом электронов, в которых весь отрицательный заряд равномерно распределен по объему молекулы. Оценим размер получившегося диполя. Поскольку радиус электронной орбиты $R \approx 10^{-10}$ м, а максимальное значение напряженности поля, не вызывающего разрыва молекулярных связей, $E \approx 10^8$ В/м, то согласно (16.4) $\Delta l \approx 7 \cdot 10^{-14}$ м, что подтверждает наше предположение о том, что значение Δl очень мало.

В *полярных диэлектриках* (диэлектриках с полярными молекулами) при отсутствии внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах не совпадают и дипольные моменты не равны нулю. Таковы, например, молекулы H_2O , NH_3 , HCl и др. Во внешнем электрическом поле происходит поворот уже существующих молекулярных диполей таким образом, что векторы дипольных моментов ориентируются вдоль силовых линий. Деформация электронных оболочек молекул практически не изменяет дипольные моменты молекул. Полярная молекула по своим электрическим свойствам подобна жесткому диполю с постоянным электрическим моментом. *Поляризация диэлектриков с жесткими диполями* обусловлена преимущественной ориентацией электрических моментов диполей в одном направлении, поэтому ее часто называют *ориентационной поляризацией*. Тепловое движение молекул нарушает этот порядок, поэтому средний дипольный момент упорядоченно расположенных диполей зависит от температуры:

$$\langle p \rangle = \varepsilon_0 \frac{p^2}{3kT\varepsilon_0} E = \varepsilon_0 \beta E, \quad \beta = \frac{p^2}{3kT\varepsilon_0}. \quad (16.7)$$

Здесь p — модуль дипольного момента молекулы; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура. Соотношение (16.7) впервые вывел голландский физик П. Дебай, получивший в 1936 г. Нобелевскую премию за создание дипольной теории диэлектриков. Выражение (16.7) по своему виду соответствует выражению (16.6), но поляризуемость полярного диэлектрика обратно пропорциональна его температуре.

Ионная поляризация происходит в твердых диэлектриках, имеющих ионную кристаллическую решетку (например, NaCl). Внешнее электрическое поле вызывает в таких диэлектриках упругое смеще-

ние всех положительных ионов в направлении вектора \vec{E} , а всех отрицательных ионов — в противоположную сторону. При снятии внешнего поля кристалл диэлектрика возвращается в исходное состояние, поэтому поляризуемость такого типа диэлектриков также пропорциональна напряженности внешнего поля.

16.2. Количественные характеристики поляризации диэлектрика

Количественной мерой поляризации диэлектрика служит *поляризованность* \vec{P} , численно равная отношению электрического дипольного момента малого объема диэлектрика ΔV к этому объему:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei}. \quad (16.8)$$

Здесь \vec{p}_{ei} — электрический дипольный момент i -й молекулы; N — общее число молекул в объеме ΔV . Этот объем должен быть достаточно малым, чтобы в его пределах поле можно было считать однородным. В то же время число молекул в таком объеме должно быть достаточно велико, чтобы к ним можно было применить статистические закономерности. Таким образом, поляризованность диэлектрика численно равна дипольному электрическому моменту единицы объема вещества.

В пределах малого объема ΔV все молекулы диэлектрика имеют одинаковые дипольные моменты \vec{p}_{ei} , поэтому с учетом (16.6) и (16.7) получим

$$\vec{P} = n \vec{p}_{ei} = n \epsilon_0 \beta \vec{E}; \quad (16.9)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad (16.10)$$

где n — концентрация молекул диэлектрика.

Величина $\chi_e = n\beta$ называется *диэлектрической восприимчивостью* вещества. Из рассмотрения механизма поляризации неполярных диэлектриков следует, что их диэлектрическая восприимчивость не зависит явным образом от температуры: $\beta = 4\pi R^3$ [(16.5), (16.6)]. Температура может влиять на значение χ_e только косвенно — через концентрацию молекул.

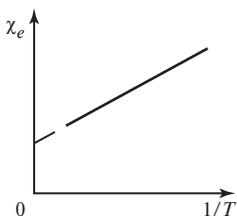


Рис. 16.3

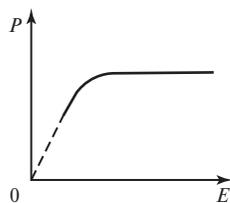


Рис. 16.4

Из (16.7) получим, что диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков обратно пропорциональна температуре (рис. 16.3).

$$\chi_e \text{ полярн} = \frac{np^2}{3k\epsilon_0 T}. \quad (16.11)$$

Хаотичное тепловое движение молекул препятствует выстраиванию электрических моментов полярных молекул по направлению \vec{E} .

В очень сильном электрическом поле и при достаточно низкой температуре электрические моменты всех молекул располагаются практически параллельно напряженности внешнего поля \vec{E} . При этом поляризованность полярного диэлектрика достигает максимального значения. Поэтому линейная зависимость поляризованности от напряженности поля наблюдается только в достаточно слабых полях (штриховая линия на рис. 16.4).

В жидких и газообразных диэлектриках одновременно может происходить и электронная, и ориентационная поляризация (молекулярные диполи в таких веществах могут поворачиваться). В твердых диэлектриках наблюдается электронная поляризация. Молекулы этих веществ достаточно жестко связаны одна с другой, чтобы позволить диполям повернуться. Из этого следует, что относительная диэлектрическая проницаемость диэлектриков в твердой фазе меньше, чем у тех же веществ в жидкой или газообразной фазе. Например, у льда $\epsilon = 3$, а у дистиллированной воды $\epsilon = 81$.

16.3. Связанные заряды на поверхности диэлектрика

В ходе поляризации диэлектрика в тонких слоях у его поверхностей возникают нескомпенсированные связанные заряды, называемые *поверхностными поляризационными зарядами*.

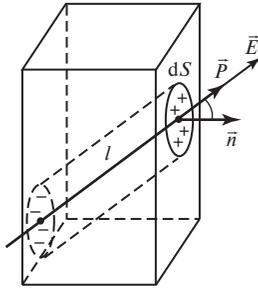


Рис. 16.5

Слой неполярного диэлектрика, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью \vec{E} , показан на рис. 16.5. Электрические моменты и оси всех диполей диэлектрика ориентируются одинаково — вдоль направления напряженности. Внешняя нормаль к границе диэлектрика составляет некоторый угол α с направлениями векторов \vec{E} и \vec{P} . Выделим в слое некоторый объем диэлектрика в виде косоугольного цилиндра с площадью основания dS и длиной образующей l . Суммарный электрический момент диполей, попавших в этот объем, равен произведению модуля связанного заряда на поверхности диэлектрика $q_{\text{связ}}$ и плеча получившегося диполя l :

$$\sum p_e = q_{\text{связ}} l = \sigma_{\text{связ}} dS l. \quad (16.12)$$

В то же время, в соответствии с (16.8),

$$\sum p_e = |\vec{P}| V = P dS l \cos \alpha = P_n dS l, \quad (16.13)$$

где P_n — проекция поляризованности на нормаль к границе диэлектрика. Сравнение (16.12) и (16.13) дает

$$\sigma_{\text{связ}} = P_n. \quad (16.14)$$

Таким образом, поверхностная плотность связанных зарядов на границе диэлектрика с другой средой (с другим веществом) равна проекции поляризованности диэлектрика на нормаль к выбранной поверхности.

16.4. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектриках

Электрическое поле в диэлектрической среде создается как свободными, так и связанными зарядами. Согласно принципу суперпозиции (15.9) напряженность поля в веществе равна геометрической

сумме напряженностей полей, созданных свободными и связанными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{своб}} + \vec{E}_{\text{связ}}.$$

Теорема Гаусса (15.26) может быть применена для расчета электростатического поля в диэлектрической среде, если в правой части равенства рассматривать алгебраическую сумму всех свободных и связанных зарядов, охватываемых гауссовой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^n Q_{i \text{ свобод}} + \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ связ}} \right).$$

Использование полученного соотношения для расчета напряженности поля, создаваемого заданной системой свободных зарядов в диэлектрической среде, осложняется тем, что заранее не известно распределение связанных зарядов в поле. Поскольку молекулы диэлектрика электрически нейтральны, то вклад в заряд $Q_{\text{связ}}$ внесут только те молекулы, диполи которых «перерезаются» гауссовой поверхностью. Для того, чтобы определить их число, рассмотрим однородный поляризованный диэлектрик, диполи которого ориентированы по направлению \vec{E} (рис. 16.6).

На рисунке указан фрагмент гауссовой поверхности. Допустим, что силовые линии электрического поля «выходят» из объема, ограниченного поверхностью. Следовательно, внутри этого объема располагаются отрицательные заряды диполей, «перерезанных» гауссовой поверхностью. Эти отрицательные заряды не скомпенсированы положительными зарядами диполей, так как последние находятся за пределами гауссовой поверхности. Алгебраическая сумма отрицательных зарядов «перерезанных» диполей определяет значение

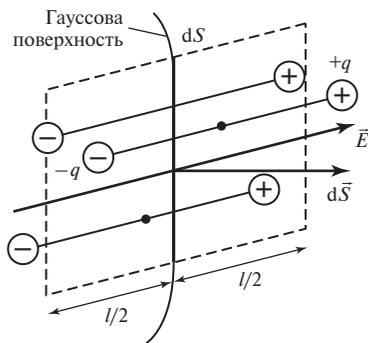


Рис. 16.6

$Q_{\text{связ}}$, входящее в выражение (15.26). Анализируя положения различных диполей, нетрудно увидеть, что гауссова поверхность «перерезает» только те диполи, центры которых (показаны на рис. 16.6 точками) удалены от нее на расстояние не большее чем $l/2$, где l — плечо диполя.

Выберем элемент гауссовой поверхности площадью dS и укажем внешнюю нормаль к нему \vec{dS} (рис. 16.6). Выделим некоторый объем диэлектрика в виде косоугольного цилиндра с площадью основания dS , образующая которого параллельна \vec{E} . Пусть длина образующей равна плечу диполя l . Число диполей, находящихся в объеме выделенного цилиндра, $dN = nl \, dS \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{dS}})$, где n — концентрация молекул диэлектрика.

Суммарный отрицательный заряд этих диполей $dQ_{\text{связ}} = -qnl \, dS \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{dS}})$. Учтем, что $ql = p_e$, а $p_e n = P$ согласно (16.9).

Тогда $lQ_{\text{связ}} = -P \, dS \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{dS}}) = -P \, dS \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{dS}})$; $\vec{P} \uparrow \uparrow \vec{E}$.

В целом в объеме, ограниченном гауссовой поверхностью, находится связанный электрический заряд

$$Q_{\text{связ}} = \oint_S dQ_{\text{связ}} = - \oint_S P \, dS \cos \alpha = - \oint_S \vec{P} \cdot \vec{dS}.$$

С учетом полученного соотношения преобразуем выражение (15.26) теоремы Гаусса следующим образом:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^n Q_i \text{своб} - \oint_S \vec{P} \cdot \vec{dS} \right); \\ \oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{dS} &= \sum_{i=1}^n Q_i \text{своб}. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Введем еще одну физическую величину — *электрическую индукцию* \vec{D} (часто эту величину называют *электрическим смещением*):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (16.16)$$

где $\epsilon = 1 + \chi_e$ — относительная диэлектрическая проницаемость.

Теперь (16.15) запишем в виде

$$\oint \vec{D} \, d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}}. \quad (16.17)$$

Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охваченных этой поверхностью. Поток вектора электрического смещения определяется только свободными зарядами, поэтому в таком виде теорему Гаусса удобно применять в диэлектрических средах.

При расчете напряженности электростатического поля в диэлектрической среде необходимо сначала определить модуль и направление вектора электрического смещения \vec{D} (как это было сделано в § 15.7 для вектора \vec{E}). Затем, пользуясь соотношением (16.16), необходимо определять значение и направление вектора напряженности \vec{E} .

Рассмотрим пример 15.6, приведенный в § 15.7, и определим напряженность электростатического поля во всех точках пространства, если электрический заряд $Q > 0$ равномерно распределен по объему диэлектрического шара радиусом R , относительная диэлектрическая проницаемость которого равна ϵ . Повторяя рассуждения § 15.7, получаем

$$D(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{Qr}{R^3}, & r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

Так как $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$, а $\vec{D} \uparrow \uparrow \vec{E}$, то $D = \epsilon\epsilon_0 E$, поэтому запишем:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}, & r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

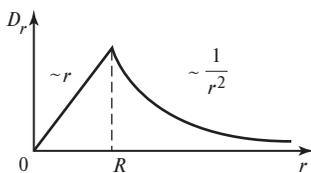


Рис. 16.7

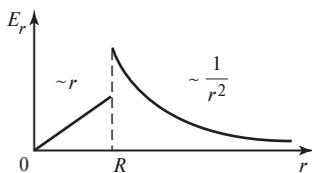


Рис. 16.8

Графики полученных зависимостей $D_r(r)$ и $E_r(r)$ приведены на рис. 16.7 и 16.8. Отметим, что зависимость $E_r(r)$ имеет разрыв на поверхности шара (при $r = R$), так как на этой поверхности находится связанный положительный заряд.

16.5. Условия на границе диэлектрических сред

Найдем соотношения между значениями напряженности и электрического смещения в двух граничащих диэлектрических средах. Для этого рассмотрим произвольную точку A на границе раздела двух сред 1 и 2 для случая $\epsilon_2 < \epsilon_1$ (рис. 16.9).

Проведем из точки A единичные векторы, направленные по касательной к поверхности раздела сред ($\vec{\tau}$) и по нормали к ней (\vec{n}). Построим вблизи точки A замкнутый контур L в виде прямоугольника с размерами $\Delta h \times \Delta l$, стороны которого попарно параллельны этим векторам. Из условия потенциальности электростатического поля следует, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль контура L равна нулю: $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$.

Устремим высоту прямоугольного контура Δh к нулю. Тогда длины боковых сторон контура и значения $\int \vec{E} d\vec{l}$ на этих сторонах также стремятся к нулю. При этом верхняя и нижняя стороны кон-

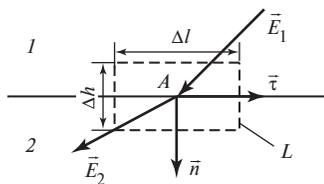


Рис. 16.9

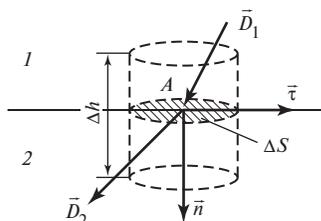


Рис. 16.10

тура приближаются к поверхности раздела сред. При обходе контура против часовой стрелки получаем

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = E_{1\tau} \Delta l \cos 0^\circ + E_{2\tau} \Delta l \cos 180^\circ = (E_{1\tau} - E_{2\tau}) \Delta l = 0. \quad (16.18)$$

Следовательно,

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (16.19)$$

т.е. *составляющая вектора напряженности поля, касательная к поверхности раздела двух сред, не изменяется при переходе через эту поверхность*. С учетом (16.16) запишем

$$D_{2\tau} = D_{1\tau} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (16.20)$$

Для определения связи нормальных к поверхности раздела сред проекций вектора напряженности и вектора смещения выберем вокруг точки A участок поверхности раздела сред площадью ΔS (рис. 16.10).

Построим прямой цилиндр с образующей длиной Δh , параллельной нормали (\vec{n}) к поверхности раздела. По теореме Гаусса

$$\oint \vec{D} \, d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}},$$

где $\sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}}$ — свободный заряд внутри замкнутой поверхности,

т.е. в объеме цилиндра. Устремим высоту цилиндра Δh к нулю. В таком случае поток вектора смещения через боковую поверхность цилиндра обратится в нуль. Если на поверхности раздела сред

нет свободных поверхностных зарядов, то $\sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}} = 0$. С другой

стороны,

$$\oint \vec{D} \, d\vec{S} = D_{1n} \Delta S \cos 0^\circ + D_{2n} \Delta S \cos 180^\circ = (D_{2n} - D_{1n}) \Delta S.$$

Поэтому

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (16.21)$$

Это означает, что при переходе через границу раздела двух сред, на которой нет поверхностных свободных зарядов, *нормальная*

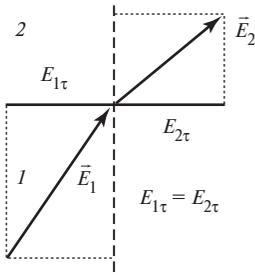


Рис. 16.11

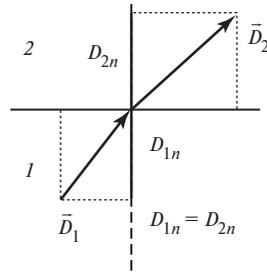


Рис. 16.12

составляющая электрического смещения не изменяется. С учетом (16.16) запишем:

$$E_{2n} = E_{1n} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (16.22)$$

С помощью этого соотношения можно легко пояснить физический смысл относительной диэлектрической проницаемости вещества. Если рассматривать преломление силовых линий электрического поля на границе «вакуум — диэлектрик», то из (16.22) следует, что

$$E_{n \text{ вак}} / E_{n \text{ диэл}} = \varepsilon.$$

Относительная диэлектрическая проницаемость равна отношению нормальной составляющей напряженности электрического поля в вакууме к нормальной составляющей напряженности электрического поля в диэлектрике.

Объединяя условия (16.19)—(16.22), можно показать, каким образом преломляются силовые линии электростатического поля при переходе из одного диэлектрика в другой. Для случая $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ это изображено на рис. 16.11 и 16.12.

Вектор напряженности поля не изменяется при переходе из одной среды в другую, если поверхность раздела сред касается силовых линий поля. Если поверхность раздела сред совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля, то векторы \vec{E} и \vec{D} перпендикулярны такой поверхности и при переходе через нее не изменяется вектор электрического смещения.

Глава 17

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Проводниками называют вещества, содержащие свободные носители заряда, т.е. частицы, которые могут свободно перемещаться по объему проводника под действием сколь угодно малого электрического поля. К данному типу веществ, прежде всего, относят металлы, в которых свободными носителями заряда являются электроны проводимости. В полупроводниках *n*-типа такими частицами выступают свободные электроны, в полупроводниках *p*-типа — положительные заряды, так называемые «дырки». В электролитах проводимость обеспечивается и положительными, и отрицательными ионами. В ионизованном газе (плазме) свободные носители заряда — это электроны и положительно заряженные ионы. При анализе особенностей поведения проводников в электростатическом поле ограничимся лишь рассмотрением металлов.

17.1. Проводники в электростатическом поле

В отсутствие внешнего электростатического поля свободные электроны хаотично располагаются в металле. При этом электрические поля электронов проводимости и положительных ионов металла взаимно компенсируются. Если проводник внесен во внешнее электростатическое поле напряженностью \vec{E}_0 (рис. 17.1), то под действием этого поля электроны проводимости приходят в движение. Они смещаются в сторону, противоположную направлению напряженности внешнего поля \vec{E}_0 , располагаясь на поверхности проводника, а положительные нескомпенсированные заряды ионов металла остаются на противоположной поверхности проводника. *Явление перераспределения свободных зарядов в проводнике под действием внешнего электрического поля называется электростатической индукцией.* При этом внутри проводника возникает собственное поле с напряженностью \vec{E}' . В процессе разделения зарядов суммарная напряженность поля в проводнике уменьшается: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$; $E = E_0 - E'$. Перерас-

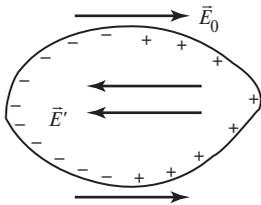


Рис. 17.1

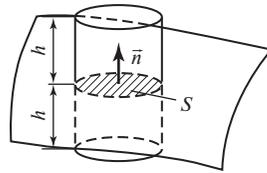


Рис. 17.2

пределение зарядов происходит до тех пор пока напряженность результирующего поля в проводнике не станет равной нулю. Если бы внутри проводника существовало электрическое поле, то перераспределение зарядов (ток в проводнике) вызвало бы нагрев проводника при отсутствии изменения внешнего поля, что противоречило бы второму началу термодинамики. Таким образом, в любой точке проводника электрическое поле электронов проводимости и положительных ионов проводника компенсирует внешнее поле.

Поскольку распределение зарядов по поверхности проводника стационарно (заряды неподвижны), то тангенциальная (касательная к поверхности проводника) составляющая напряженности электростатического поля равна нулю. Это означает, что вектор \vec{E} и силовые линии поля перпендикулярны к поверхности проводника. Из этого, в свою очередь, следует, что потенциал поверхности проводника одинаков во всех точках. *Эквипотенциальной поверхностью* называется геометрическое место точек пространства, потенциалы которых равны. Таким образом, поверхность проводника является эквипотенциальной. Разность потенциалов между любыми двумя

точками внутри проводника $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, так как напря-

женность внутри проводника равна нулю. Это означает, что весь проводник представляет собой эквипотенциальный объем.

Для определения плотности зарядов на поверхности проводника выделим малый элемент его поверхности площадью S (рис. 17.2). Построим замкнутую гауссову поверхность в виде цилиндра, площадь основания которого равна S , а сами основания расположены по обе стороны поверхности проводника на расстояниях h от нее. Поток

напряженности поля через гауссову поверхность определится следующим образом:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} d\vec{S} &= \int_{(S_{\text{бок}})} \vec{E} d\vec{S} + \int_{(S_{\text{верхн}})} \vec{E} d\vec{S} + \int_{(S_{\text{нижн}})} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{(S_{\text{бок}})} E dS \cos 90^\circ + \int_{(S_{\text{верхн}})} E dS \cos 0^\circ = E_n S,\end{aligned}$$

причем $\int_{(S_{\text{нижн}})} \vec{E} d\vec{S} = 0$, так как электрическое поле внутри про-

водника отсутствует. Здесь $S_{\text{бок}}$, $S_{\text{верхн}}$, $S_{\text{нижн}}$ — соответственно площади боковой поверхности цилиндра, его верхнего и нижнего оснований.

Поскольку выбранная гауссова поверхность охватывает заряд $q_{\text{охв}} = \sigma S$, расположенный на поверхности проводника, то по теореме

$$\text{Гаусса } E_n S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma S,$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n, \quad (17.1)$$

т.е. *плотность электрического заряда на поверхности проводника прямо пропорциональна напряженности поля вблизи его поверхности*. Следствие: при переходе через поверхность заряженного проводника напряженность электрического поля изменяется скачком на $|\Delta E| = \sigma / \varepsilon_0$.

Как связана поверхностная плотность распределения зарядов с кривизной поверхности проводника? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала заряженный проводящий шар. Если заряд шара равен Q , а радиус — R , то потенциал поверхности шара можно определить так:

$$\varphi = \int_R^{r_\varphi=0} E dr = \int_R^\infty E dr = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Умножив числитель и знаменатель на R , получим:

$$\varphi = \frac{QR}{\varepsilon_0 4\pi R^2} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}. \quad (17.2)$$

Поскольку кривизна поверхности шара постоянна ($R = \text{const}$) и потенциал поверхности одинаков в любой точке, то $\sigma = \text{const}$, т.е. заряды по поверхности проводящего шара распределены равномерно.

Рассмотрим распределение зарядов по поверхности проводника с различными радиусами кривизны в разных точках поверхности. Пусть два удаленных друг от друга заряженных шара разных радиусов R_1 и R_2 имеют заряды Q_1 и Q_2 (рис. 17.3). После соединения этих шаров тонкой проволокой образуется один проводник с изменяющейся кривизной поверхности. Заряды перераспределяются между шарами до тех пор пока их потенциалы не станут равны (зарядами на поверхности тонкой проволоки пренебрегаем):

$$\frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

где Q'_1 и Q'_2 — новые заряды шаров. Из последнего выражения с учетом (17.2) получаем $\sigma'_1 R_1 = \sigma'_2 R_2$. Таким образом, поверхностная плотность заряда увеличивается на тех участках поверхности проводника, где радиус кривизны поверхности меньше. В результате вблизи острых концов проводников накапливается большой заряд и создается сильное электростатическое поле с большой напряженностью.

Распределение силовых линий поля, создаваемого заряженным проводником произвольной формы, показано на рис. 17.4. Вблизи острия проводника силовые линии расположены ближе одна к другой, так как модуль напряженности поля вблизи острия принимает самые большие значения.

Сформулируем основные свойства электростатического поля при наличии проводников:

- 1) электростатическое поле внутри проводника отсутствует;
- 2) при помещении проводника в электростатическое поле в проводнике возникают индуцированные заряды, которые располагаются исключительно на поверхности проводника;
- 3) свободные заряды, принесенные на проводник, также распределяются по его поверхности;
- 4) силовые линии электростатического поля вблизи поверхности проводника перпендикулярны к его поверхности;
- 5) все точки проводника имеют одинаковый потенциал;

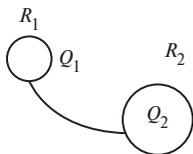


Рис. 17.3

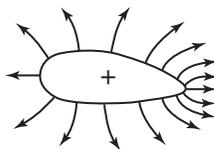


Рис. 17.4

6) поверхностная плотность заряда на поверхности проводника обратно пропорциональна радиусу кривизны поверхности;

7) при переходе через поверхность заряженного проводника напряженность электрического поля изменяется скачком на $|\Delta E| = \sigma/\epsilon_0$.

17.2. Электрическая емкость. Конденсаторы

Найдем связь потенциала проводника с его электрическим зарядом. Рассмотрим проводник произвольной формы, бесконечно удаленный от других проводников. Если сообщить этому проводнику некоторый свободный заряд Q , то он распределится по поверхности проводника. Плотность поверхностного заряда σ в каждой точке поверхности проводника будет пропорциональна заряду Q , а зависимость поверхностной плотности заряда от координат определится функцией $f(\vec{r})$, зависящей от формы проводника:

$$\sigma(\vec{r}) = Qf(\vec{r}). \quad (17.3)$$

Каждая следующая порция заряда, переносимого на проводник, будет распределяться по поверхности с плотностью согласно зависимости (17.3). Вычислим потенциал произвольной точки A заряженного проводника (рис. 17.5), пользуясь методом суперпозиции.

Выделим на поверхности проводника малый элемент dS , который имеет заряд $dQ = \sigma(\vec{r}) dS$. Размеры элемента поверхности dS должны быть настолько малы, чтобы заряд dQ можно было бы считать точечным. Примем потенциал равным нулю на бесконечности и воспользуемся формулой потенциала точечного заряда:

$$\delta\varphi_A = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Тогда

$$\varphi_A = \oint \frac{\sigma(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Учитывая (17.3), получаем:

$$\varphi_A = \oint \frac{Qf(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r} = Q \oint \frac{f(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (17.4)$$

Вид функции $f(\vec{r})$, конечно же, зависит от выбора точки начала отсчета (точка A), однако,

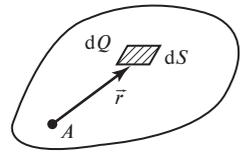


Рис. 17.5

поскольку потенциалы всех точек проводника равны, значение интеграла в (17.4) должно быть константой. Введем обозначение:

$$\oint \frac{f(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{C},$$

где C — константа, зависящая от формы и размеров проводника.

Теперь потенциал проводника запишем следующим образом:

$$\varphi = Q/C. \quad (17.5)$$

Итак, потенциал уединенного проводника пропорционален его заряду и обратно пропорционален константе C , определяемой геометрией проводника.

Физический смысл константы C , называемой *электрической емкостью*, определим из (17.5):

$$C = Q/\varphi. \quad (17.6)$$

Электрической емкостью уединенного проводника называется физическая величина, равная отношению заряда проводника к его потенциалу в поле этого заряда. Электрическая емкость проводника показывает, какой заряд необходимо сообщить проводнику для того, чтобы его потенциал принял заданное значение. Чем больше заряд проводника, тем больше его потенциал в поле этого заряда. Электрическая емкость не зависит ни от заряда проводника, ни от его потенциала, а зависит только от размера и формы проводника, а также от диэлектрических свойств среды, в которой он находится. Единица измерения электрической емкости проводника в СИ называется фарад (обозначается Ф): $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл}/1 \text{ В}$.

Расчет электрической емкости уединенных проводников производится по формуле (17.6) следующим образом:

- 1) задается произвольный заряд проводника Q ;
- 2) с помощью метода суперпозиции или теоремы Гаусса определяется напряженность электрического поля;
- 3) с помощью интегральной связи напряженности и потенциала по известной напряженности определяется потенциал;
- 4) по формуле (17.6) определяется электрическая емкость:

$$Q \Rightarrow \vec{E}(Q) \Rightarrow \varphi(Q) \Rightarrow C = Q/\varphi(Q).$$

Подчеркнем, что электрическая емкость проводника не зависит от его заряда Q .

Пример 17.1. Выведем формулу емкости проводящего шара радиусом R , находящегося в вакууме. Для этого сообщим шару произвольный заряд Q . Заряд равномерно распределится по поверхности

шара с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$, которая одинакова в каждой точке поверхности шара. Этот заряд создаст электростатическое поле, напряженность которого определяется следующим образом (см. пример 15.6, § 15.7):

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

Потенциал шара

$$\varphi = \int_R^{\infty} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

В соответствии с (17.6) электрическая емкость шара запишется в виде

$$C_{\text{ш}} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (17.7)$$

Из (17.7) видно, что электрическая емкость проводника 1 Ф — это колоссальное значение: шар с такой электрической емкостью должен иметь радиус $9 \cdot 10^9$ м, что соответствует радиусу орбиты Меркурия. Поэтому для практического измерения емкости проводников используются следующие единицы: 1 мкФ (микрофарад) = 10^{-6} Ф; 1 нФ (нанофарад) = 10^{-9} Ф; 1 пФ (пикофарад) = 10^{-12} Ф.

При определении электрической емкости проводника описанным выше способом важно, чтобы вблизи него не находились другие проводники, т.е. чтобы проводник был уединенным.

Рассмотрим, как изменится электрическая емкость проводника, если он будет находиться рядом с незаряженным проводником. Допустим, что проводник 1 обладает положительным зарядом (рис. 17.6). Этот заряженный проводник создает электрическое поле. Поэтому в незаряженном проводнике 2 произойдет разделение зарядов (электростатическая индукция) на отрицательные $-q_{\text{инд}}$ и поло-

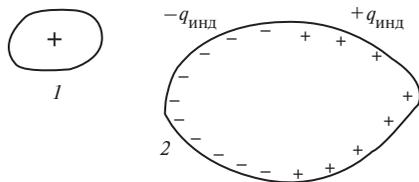


Рис. 17.6

жительные $+q_{\text{инд}}$, причем алгебраическая сумма индуцированных зарядов будет равна нулю. В свою очередь в электрическом поле индуцированных зарядов перераспределятся и заряды на проводнике l . В результате потенциал заряженного проводника изменится. Изменится и его электрическая емкость. Аналогичный вывод можно сделать, если вблизи положительно заряженного проводника располагается незаряженное диэлектрическое тело. На поверхности диэлектрика образуются связанные поляризационные заряды, что приведет к изменению потенциала и электрической емкости самого проводника.

Таким образом, электрическая емкость проводника зависит от наличия в пространстве вблизи него любого тела (проводника или диэлектрика).

Если заряженные проводники располагаются таким образом, что электрическое поле существует только в пространстве между ними, то они образуют *конденсатор*. Сами проводники при этом называются *обкладками* конденсатора. Примеры расположения двух обкладок, образующих конденсаторы, приведены на рис. 17.7, *а—в*.

Это соответственно плоский, цилиндрический и сферический конденсаторы. Плоский конденсатор создается системой двух бесконечно больших параллельных пластин площадью S , находящихся на малом расстоянии d одна от другой ($d \ll \sqrt{S}$). Цилиндрический конденсатор образован двумя бесконечно длинными коаксиальными цилиндрами ($l \gg (R_2 - R_1)$), а сферический — двумя концентрическими сферами. На рис. 17.7, *в*, последний представлен линиями пересечения обкладок (сфер) с плоскостью чертежа. Если обкладки каждой из этих систем зарядить разноименными одинаковыми по модулю зарядами, то электрическое поле образуется только в пространстве между ними. Модуль заряда любой из обкладок называется *зарядом конденсатора*.

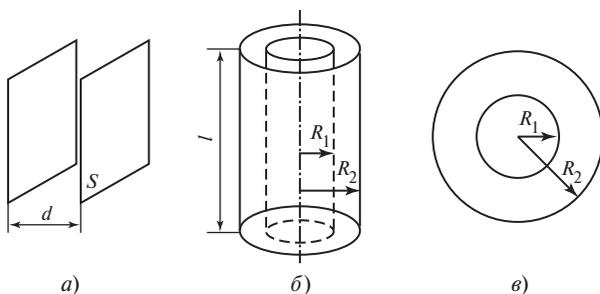


Рис. 17.7

Электрической емкостью конденсатора называется физическая величина, равная отношению заряда конденсатора к разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (17.8)$$

Так же как и электрическая емкость проводника, электрическая емкость конденсатора не зависит ни от величины заряда конденсатора, ни от разности потенциалов между его обкладками, а зависит только от размера и формы конденсатора, а также от диэлектрических свойств среды между обкладками конденсатора. Электрическая емкость конденсатора не зависит от наличия вблизи него других проводящих или диэлектрических тел и электрических полей.

Поскольку электрическая емкость величина положительная, а под зарядом конденсатора понимается модуль заряда одной из обкладок, то модуль разности потенциалов между обкладками обозначается символом U . Обычно выражение электрической емкости конденсатора записывается в виде:

$$C = Q/U.$$

Термин «электрическая емкость» возник еще в середине XVIII в., когда отсутствовало понятие электрических зарядов, а электрические явления описывались поведением «электрической жидкости», которая «переливалась» из одного проводника в другой по проводам. Таким образом, емкость конденсатора определяла «количество электрической жидкости», которое он может в себя вместить. Поэтому первый конденсатор получил название «лейденская банка» (по названию города Лейден, в котором он был сконструирован).

Пример 17.2. Выведем формулу электрической емкости плоского конденсатора, изображенного на рис. 17.7, *а*. Определим напряженность электростатического поля, создаваемого зарядом $+Q$ одной из пластин площадью S . Силовые линии такого поля изображены на рис. 17.8.

Если рассмотреть точки пространства, расположенные настолько близко к пластине, что расстояние от них до пластины существенно меньше, чем до ее границ (из этих точек пластина будет представляться как бесконечно большая плоскость), то искривлением силовых линий у границ пластины можно пренебречь (рис. 17.9). Таким образом, большая заряженная пластина площадью S создает однородное поле. Ввиду симметричности системы модуль напряженности поля во всех точках, равноудаленных от пластины, должен быть одинаковым, а направление вектора \vec{E} зависит только от положения исследуемой точки пространства (слева или справа от пластины).

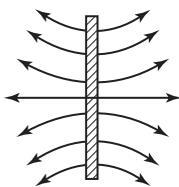


Рис. 17.8

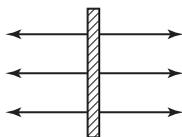


Рис. 17.9

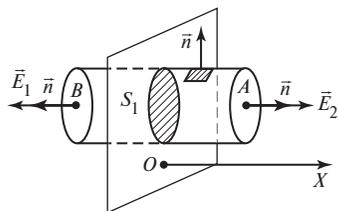


Рис. 17.10

Определим напряженность поля в некоторой точке с координатой x , отсчитываемой вдоль оси Ox , направленной перпендикулярно пластине. Для этого в качестве гауссовой поверхности выберем поверхность цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости, а основание имеет площадь S_1 (рис. 17.10).

Модуль напряженности поля одинаков во всех точках оснований цилиндра, исходя из симметрии системы. Угол между \vec{E} и внешней нормалью к поверхности во всех точках боковой поверхности цилиндра равен $\pi/2$, а во всех точках левого и правого оснований гауссова цилиндра этот угол равен нулю.

Определим поток напряженности поля через выбранную поверхность:

$$\oint_S \vec{E} \, d\vec{S} = E_1 \int_{S_{\text{лев}}} \cos(\widehat{\vec{E}_1, d\vec{S}}) \, dS + E_2 \int_{S_{\text{прав}}} \cos(\widehat{\vec{E}_2, d\vec{S}}) \, dS + E \int_{S_{\text{бок}}} \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}) \, dS,$$

где $S_{\text{лев}}$ — площадь левого основания гауссова цилиндра; $S_{\text{прав}}$ — площадь правого основания гауссова цилиндра; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности гауссова цилиндра. Получаем

$$E_1 \int_{S_{\text{лев}}} \cos(\widehat{\vec{E}_1, d\vec{S}}) \, dS = E_1 S_1; \quad E_2 \int_{S_{\text{прав}}} \cos(\widehat{\vec{E}_2, d\vec{S}}) \, dS = E_2 S_1;$$

$$E \int_{S_{\text{бок}}} \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}) \, dS = 0.$$

Таким образом, так как $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}|$,

$$\oint_S \vec{E} \, d\vec{S} = 2ES_1. \quad (17.9)$$

Определим алгебраическую сумму зарядов, охваченных цилиндрической гауссовой поверхностью. В данном случае электрический заряд, попавший внутрь неё, — это заряд «вырезанной» цилиндром части пластины. Его можно найти, умножив площадь основания цилиндра на поверхностную плотность заряда пластины:

$$Q_{\text{охв}} = \sigma S_1 = \frac{Q}{S} S_1. \quad (17.10)$$

Приравняем (17.9) и (17.10) с учетом коэффициента ϵ_0 , получим:

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}. \quad (17.11)$$

Полученное соотношение определяет модуль напряженности однородного поля бесконечно большой заряженной пластины.

Расположим две разноименно заряженные пластины на малом расстоянии одна от другой так, чтобы выполнялось условие однородности поля каждой из них. На рис. 17.11 показаны силовые линии поля каждой пластины. Видно, что в пространстве между пластинами напряженности полей пластин совпадают по направлению, а вне пластин противоположны. Поэтому с учетом (17.11) запишем напряженность поля по принципу суперпозиции:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}, \quad 0 < x < d;$$

$$E = 0, \quad x < 0, x > d.$$

В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсатора можно определить следующим образом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E \, dx = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d.$$

По определению (17.8) запишем электрическую емкость плоского конденсатора:

$$C = \epsilon_0 S / d.$$

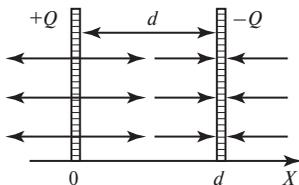


Рис. 17.11

Следует учесть, что если пространство между обкладками любого конденсатора заполнить диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , то при том же значении заряда обкладок напряженность поля между обкладками уменьшится в ϵ раз. Поэтому в ϵ раз уменьшится разность потенциалов между ними, а следовательно, в ϵ раз увеличится емкость конденсатора. Запишем формулу емкости плоского конденсатора, заполненного диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ :

$$C = \epsilon\epsilon_0 S/d. \quad (17.12)$$

Аналогично можно вывести формулу емкости сферического конденсатора:

$$C_{\text{сф}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Если конденсатор заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , то

$$C_{\text{сф}} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (17.13)$$

Подчеркнем еще раз, что электрическая емкость конденсатора зависит от его размера, формы обкладок и диэлектрических свойств среды, находящейся между его обкладками.

17.3. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии

Рассмотрим процесс зарядки проводника. Чтобы его заряд достиг величины Q , будем сообщать проводнику заряд порциями dq , перенося их из бесконечно удаленной точки 1 на поверхность проводника в точку 2 (рис. 17.12).

Для передачи проводнику новой порции заряда dq внешние силы должны совершить работу против сил электрического поля:

$$\delta A_{\text{внеш}} = -dA_{\text{поля}} = -dq(\varphi_1 - \varphi_2).$$

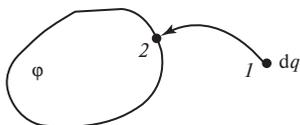


Рис. 17.12

Потенциал бесконечно удаленной точки примем равным нулю $\varphi_1 = 0$. Потенциал точки 2 равен потенциалу проводника φ , поэтому

$$\delta A_{\text{внеш}} = dq\varphi.$$

Если проводнику передан заряд q , то его потенциал $\varphi = q/C$. Работу внешних сил по зарядке проводника зарядом Q рассчитаем так:

$$A_{\text{внеш}} = \int_0^Q dq\varphi = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Согласно закону сохранения энергии приращение электрической энергии проводника равно работе внешних сил:

$$W_{\text{пров}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (17.14)$$

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора электрической емкостью C от источника ЭДС. Источник в процессе зарядки переносит заряды на пластины конденсатора, причем сторонние силы источника совершают работу по увеличению энергии конденсатора:

$$A_{\text{ист}} = \int_0^Q \varphi dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C},$$

где Q — заряд конденсатора после его зарядки. Тогда энергия электрического поля в конденсаторе

$$W_{\text{поля}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}. \quad (17.15)$$

С учетом того, что $Q = C|\varphi_1 - \varphi_2|$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$, энергию электрического поля можно представить двумя способами:

$$W_{\text{поля}} = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{и} \quad W_{\text{поля}} = \frac{C}{2} \left(\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \right)^2.$$

Сопоставление двух соотношений позволяет задать вопрос: с чем связана энергия электрического поля — с электрическим зарядом, создающим поле (первая формула), или с напряженностью поля (вторая формула)? Оба записанных равенства согласуются с результатами экспериментов, т.е. расчет энергии поля можно одинаково правильно осуществлять по обеим формулам. Однако такое наблюдается только в электростатике, т.е. когда осуществляется расчет энергии поля неподвижных зарядов.

При рассмотрении теории электромагнитного поля в дальнейшем увидим, что электрическое поле может создаваться не только неподвижными зарядами. Электростатическое поле — это частный случай электромагнитного поля. Его энергия распределена в пространстве с определенной плотностью.

Определим энергию электрического поля плоского конденсатора. Подставим в (17.15) выражение для электрической емкости $C = \epsilon\epsilon_0 S/d$ и формулу связи разности потенциалов и напряженности однородного поля $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$. В результате получим:

$$W_{\text{поля}} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{2d} E^2 d^2 = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2 Sd}{2},$$

где $Sd = V$ — объем конденсатора, т.е. объем той части пространства, в которой создано электрическое поле. Введем величину

$$w_{\text{э}} = W_{\text{поля}}/V = \epsilon\epsilon_0 E^2/2, \quad (17.16)$$

которая называется *объемной плотностью энергии поля*. Она равна отношению энергии поля, заключенного в некотором объеме пространства, к этому объему.

Следовательно, энергия однородного электрического поля $W = w_{\text{э}}V = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V$. Если поле неоднородное, то можно выбрать такой элементарный объем пространства dV , в пределах которого значение напряженности поля будет практически одинаковым. Тогда по аналогии с предыдущей формулой выражение для энергии поля в элементарном объеме: $dW_{\text{поля}} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV$. Для всего пространства, в котором присутствует неоднородное поле,

$$W_{\text{поля}} = \int_{(V)} w_{\text{э}} dV. \quad (17.17)$$

Пример 17.3. Рассчитаем энергию электрического поля, созданного проводящим шаром радиусом R , заряженным зарядом Q и находящимся в среде с относительной диэлектрической проницае-

мостью ε . Приведем зависимость напряженности электрического поля, создаваемого заряженным шаром:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

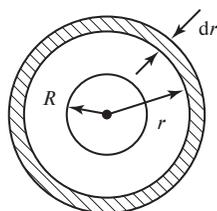


Рис. 17.13

Поскольку напряженность поля зависит только от радиальной координаты r , то она будет практически постоянна в пределах тонкого сферического слоя с радиусом внутренней поверхности слоя r и толщиной dr (рис. 17.13). Объем этого слоя $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда энергия поля

$$\begin{aligned} W_{\text{поля}} &= \oint_{(V)} w_{\text{э}} dV = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \\ &= \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Аналогичный результат можно получить, если вычислять энергию заряженного шара по формуле (17.15). Воспользовавшись выражением электрической емкости уединенного шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, получим:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

Однако расчет по формуле (17.15) неприменим, если необходимо найти энергию электрического поля, заключенную не во всем объеме пространства, где присутствует поле, а лишь в части объема этого пространства.

17.4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Уравнение Пуассона

Рассмотренные выше способы решения основной задачи электростатики, т.е. нахождения напряженности и потенциала электростатического поля по заданному распределению электрических зарядов, сводятся к двум основным методам.

Метод 1. В исследуемой точке пространства по заданному распределению зарядов находится напряженность электростатического

поля. Для этого применяется принцип суперпозиции (15.9) или теорема Гаусса (16.17). На следующем этапе ищется потенциал исследуемой точки поля. Для этого используется интегральная связь напряженности и потенциала (15.16).

Метод 2. В исследуемой точке пространства по заданному распределению зарядов находится потенциал электростатического поля. Для этого применяется принцип суперпозиции (15.17). На следующем этапе определяется напряженность в исследуемой точке поля. Для этого используется дифференциальная связь напряженности и потенциала (15.18).

Оба этих метода, основанные на первоначальном использовании или теоремы Гаусса, или принципа суперпозиции, имеют определенные недостатки. Во-первых, использование принципа суперпозиции очень часто приводит к интегрированию весьма сложных функций. Решение подобных задач в аналитическом виде иногда просто невозможно, и приходится применять методы численного интегрирования. Во-вторых, несмотря на всеобщий характер, теорема Гаусса удобно разрешима только для симметричных систем зарядов.

Попытаемся преодолеть эти трудности, рассмотрев использование теоремы Гаусса в дифференциальном виде. Допустим, что электрический заряд произвольным образом распределен в пространстве. Для несимметричной системы зарядов невозможно подобрать «удобную» замкнутую гауссову поверхность конечной площади, проходящую через исследуемую точку пространства. Поэтому охватим эту точку A некоторой произвольной замкнутой поверхностью, ограничивающей бесконечно малый объем пространства. В качестве такой поверхности выберем поверхность кубика с размерами $dx \times dy \times dz$ (рис. 17.14). Тогда выражение (16.17) запишется в виде

$$d\left(\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}\right) = d\left(\sum_{i=1}^n Q_{\text{своб}}\right), \quad (17.18)$$

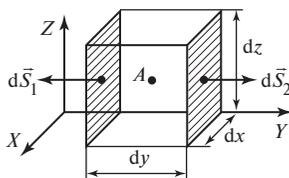


Рис. 17.14

где слева представлен элементарный поток электрического смещения через выбранную поверхность, а справа — элементарный свободный заряд, охваченный ею.

Представим вектор \vec{D} в виде суммы компонент вектора вдоль соответствующих осей координат: $\vec{D} = D_x \vec{i} + D_y \vec{j} + D_z \vec{k}$. Тогда поток вектора \vec{D} через левую грань кубика будет выражаться равенством

$$d\Phi_1 = D_y \vec{j} \cdot d\vec{S}_1 = -D_y(y) dS_1,$$

где знак «-» означает, что внешняя нормаль к левой грани кубика направлена противоположно оси OY ; $D_y(y)$ — проекция вектора смещения на ось OY на левой грани кубика, т.е. в точке с координатой y ; а dS_1 — площадь левой грани кубика, причем $dS_1 = dx dz$.

Аналогично поток вектора \vec{D} через правую грань кубика

$$d\Phi_2 = D_y \vec{j} \cdot d\vec{S}_2 = D_y(y + dy) dS_2,$$

где dS_2 — площадь правой грани кубика, причем $dS_2 = dx dz$. Проекция вектора смещения на ось OY на правой грани кубика, т.е. в точке с координатой $y + dy$,

$$D_y(y + dy) = D_y(y) + \frac{\partial D_y}{\partial y} dy.$$

Суммарный поток вектора смещения через левую и правую грани кубика

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial D_y}{\partial y} dy dx dz. \quad (17.19)$$

Таким же образом можно получить суммарный поток вектора смещения через верхнюю и нижнюю грани кубика

$$d\Phi_3 + d\Phi_4 = \frac{\partial D_z}{\partial z} dz dx dy, \quad (17.20)$$

а также через переднюю и заднюю грани:

$$d\Phi_5 + d\Phi_6 = \frac{\partial D_x}{\partial x} dx dy dz. \quad (17.21)$$

Полный поток через всю гауссову поверхность получим, сложив выражения (17.19) — (17.21):

$$d\Phi = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (17.22)$$

Полученное соотношение представляет собой элементарный поток электрического смещения (выражение, стоящее в левой части формулы (17.18)). Выражение для правой части этой формулы можно найти, используя понятие объемной плотности заряда. Элементарный свободный заряд, охваченный гауссовой поверхностью, равен произведению объемной плотности заряда и объема кубика:

$$d \left(\sum_{i=1}^n Q_{\text{своб}} \right) = \rho dV = \rho dx dy dz. \quad (17.23)$$

Приравняв теперь выражения (17.22) и (17.23), получим:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

Левая часть последнего выражения в векторной алгебре называется *дивергенцией* вектора \vec{D} :

$$\text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

Таким образом,

$$\text{div } \vec{D} = \rho. \quad (17.24)$$

Это соотношение называется *теоремой Гаусса в дифференциальной форме*. Решение дифференциальных уравнений всегда гораздо проще, чем решение интегральных уравнений, а поэтому в системах со сложным распределением зарядов (когда их объемная плотность различна в разных точках пространства) решение уравнения (17.24) позволяет найти функцию $D(x, y, z)$ значительно легче.

Для однородной и изотропной среды выражение (17.24) можно преобразовать для нахождения напряженности электрического поля:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (17.25)$$

Воспользуемся дифференциальной связью напряженности и потенциала электростатического поля (15.18). В результате получим, что

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right).\end{aligned}$$

Тогда (17.25) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Левая часть полученного равенства представляет собой операцию суммирования вторых частных производных скалярной функции по координатам. В математике такую операцию называют *оператором Лапласа* и обозначают $\nabla^2 \equiv \Delta \varphi$ (не путайте с разностью потенциалов!). Таким образом, получим:

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (17.26)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка, называемое **уравнением Пуассона**, позволяет по заданному распределению зарядов получить распределение потенциала электростатического поля, созданного этими зарядами.

Глава 18

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Пример 18.1. Определить силу взаимодействия равномерно заряженной сферы радиусом R и зарядом Q с равномерно заряженным стержнем длиной l и зарядом q . Ближайший конец стержня находится на расстоянии r ($r > R$) от центра сферы.

Будем искать силу F , действующую со стороны сферы на стержень. Рассмотрим два положения стержня: исходное положение 1 и положение 2 (рис. 18.1), в которое стержень сместится на расстояние dr от сферы. Работа электростатического поля сферы по перемещению всего стержня в такое положение равна $\delta A = F dr$.

Однако положения 2 можно достигнуть иначе: можно самый левый кусочек стержня длиной dr и зарядом $dq = q \frac{dr}{l}$ переместить на правый конец стержня, не перемещая другие его части. В таком случае работа электростатического поля сферы составит:

$$\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = q \frac{dr}{l} \left(\frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{r+l} \right).$$

Поскольку работа поля не зависит от траектории перехода из положения 1 в положение 2, то

$$F dr = q \frac{dr}{l} \left(\frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{r+l} \right), \text{ откуда } F = k \frac{Qq}{l} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l} \right).$$

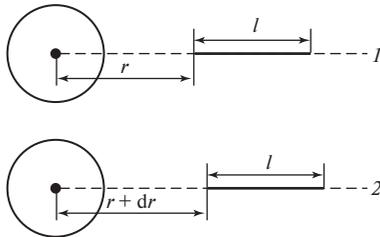


Рис. 18.1

Пример 18.2. На идеально гладком непроявляющем столе лежат три заряженных шарика, связанных тремя идеальными непроявляющими нитями. Масса и заряд каждого шарика равны m и q , длина каждой нити l . Одну из нитей пережигают. Определите максимальные скорости шариков в дальнейшем процессе их движения.

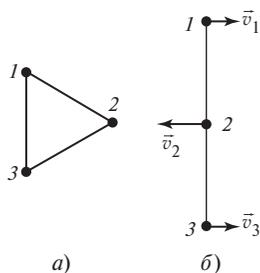


Рис. 18.2

На рис. 18.2 показано, что при пережигании нити 1-3 шарик 1 и 3 начнут свое движение вправо, а шарик 2 — влево, причем угол между нитями 1-2 и 2-3 будет увеличиваться от первоначального значения 60° в положении (а) до значения 180° в положении (б), когда скорости шариков станут максимальными. В системе шариков действуют только потенциальные силы, поэтому энергия системы сохраняется.

Потенциальные энергии взаимодействия шариков в положениях (а) и (б):

$$W_a = \frac{1}{2} \sum q_i \phi_i = 3k \frac{q^2}{l}, \quad W_b = \frac{1}{2} \sum q_i \phi_i = \frac{5}{2} k \frac{q^2}{l}.$$

Поскольку из симметрии задачи следует, что $v_1 = v_3$, то закон сохранения энергии запишется следующим образом:

$$3k \frac{q^2}{l} = \frac{5}{2} k \frac{q^2}{l} + \frac{mv_2^2}{2} + 2 \frac{mv_1^2}{2}.$$

Проекция внешних сил, действующих на шарик, на горизонтальную плоскость стола отсутствуют, поэтому сохраняется проекция импульса системы: $0 = mv_2 - 2mv_1$.

Решая составленные уравнения, получаем

$$v_1 = v_3 = q \sqrt{\frac{k}{6ml}}; \quad v_2 = 2v_1 = 2q \sqrt{\frac{k}{6ml}}.$$

Пример 18.3. Шар радиусом R_1 заряжен с объёмной плотностью заряда ρ . Полость радиусом R_2 находится в шаре так, что ее центр расположен на расстоянии L от центра шара (рис. 18.3). Найти напряженность электростатического поля в полости.

Пусть O_1 — центр шара, O_2 — центр полости, а $|O_1O_2| = L$. Рассмотрим систему двух заряженных тел: сплошной шар радиусом R_1 с объёмной плотностью заряда ρ с центром в т. O_1 и сплошной шар

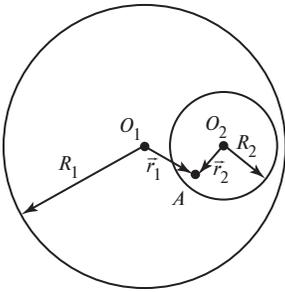


Рис. 18.3

радиусом R_2 с объёмной плотностью заряда $-\rho$ с центром в т. O_2 . Очевидно, что суперпозиция этих тел эквивалентна исходному шару с полостью. Воспользуемся решением примера 15.6 из § 15.7, согласно которому напряженность поля внутри объёмно заряженного шара равна $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$.

Поскольку $Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, то $E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$.

Поскольку любая точка A полости находится внутри любого из шаров, то $\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 — напряженности полей, создаваемых шаром 1 и шаром 2. Учтем, что

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0}, \text{ а } \vec{E}_2 = \frac{-\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0}. \text{ Тогда } \vec{E}_A = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2},$$

$$E_A = \frac{\rho}{3\epsilon_0} L.$$

Мы получили весьма интересный результат: внутри полости в равномерно заряженном по объёму шаре напряженность электростатического поля не зависит от положения исследуемой точки полости, т.е. электростатическое поле однородно.

Пример 18.4. Рассмотрим решение обратной задачи электростатики, когда необходимо по известному закону $E_r(r)$ восстановить расположение и значения электрических зарядов, создающих такое поле. Пусть задано сферически симметричное электростатическое поле такое, что

$$E_r = \frac{b}{8\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r^2}{a^2} + 2 \frac{r}{a} + 2 \right) e^{-r/a},$$

где $a = \text{const}$; $b = \text{const}$; $a > 0$; $b > 0$. Определите значение заряда Q , находящегося внутри сферы радиусом r .

Воспользуемся для решения задачи теоремой Гаусса. Из соотношения (15.26) следует, что заряд, расположенный внутри замкнутой поверхности S , можно найти так:

$$Q = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Рассмотрим поток напряженности через поверхность сферы радиусом r :

$$\Phi = E 4\pi r^2 = \frac{b}{2\varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a} + 2 \right) e^{-r/a}.$$

Тогда соответствующий заряд, охваченный сферой, составит

$$q = \varepsilon_0 E 4\pi r^2 = \frac{b}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a} + 2 \right) e^{-r/a}. \quad (18.1)$$

Однако в полученном выводе имеется противоречие: $q \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, в то время как $q > 0$ при любом r . Иными словами: совокупность концентрических гауссовых сфер охватывает все меньший заряд, хотя внутри каждой сферы заряд положителен, но сумма положительных охваченных зарядов должна возрастать при увеличении размера охватывающей поверхности.

Определим заряд dQ , расположенный в сферическом слое радиусом r и толщиной dr . Для этого вычтем из заряда, сосредоточенного внутри сферы радиусом r_2 , заряд, расположенный внутри сферы радиусом r_1 , где $r_2 = r_1 + dr$:

$$dQ = 4\pi\varepsilon_0(r_2^2 E_{r_2} - r_1^2 E_{r_1}) = 4\pi\varepsilon_0 d(r^2 E).$$

Последнее выражение представляет собой полный дифференциал функции $r^2 E(r)$. Объемная плотность заряда в рассматриваемом сферическом слое

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{4\pi\varepsilon_0 d(r^2 E)}{4\pi r^2 dr} = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \left(2rE + r^2 \frac{dE}{dr} \right).$$

Зная заданную в условии функцию $E(r)$, можно найти ее производную $\frac{dE}{dr}$ и подставить в последнее выражение. Опуская алгебраические преобразования, запишем:

$$\rho = -\frac{b}{8\pi a^3} e^{-r/a}.$$

Вот теперь мы можем найти полный заряд во всем пространстве:

$$Q = \int_0^{\infty} \rho 4\pi r^2 dr = -b.$$

В то же время при $r \rightarrow 0$ из (18.1) мы получаем, что $q \rightarrow b > 0$. Таким образом, в центре системы расположен положительный точечный заряд, а вокруг него в пространстве распределен отрицательный заряд, равный ему по модулю. Данное распределение заряда соответствует модели атома.

Пример 18.5. Точечный заряд Q расположен в вершине A куба. Определите поток вектора напряженности электростатического поля, созданного зарядом, через каждую из граней этого куба.

Силовые линии поля заряда скользят по трем граням куба, пересекающимся в вершине A . Следовательно, поток напряженности поля через каждую из этих граней равен нулю. Из симметрии задачи очевидно, что потоки напряженности поля через каждую из остальных граней куба одинаковы. Зададимся вопросом: «Какая часть силовых линий поля, созданного зарядом, проходит внутри данного куба?» Ответ очевиден: $1/8$ часть, так как куб принадлежит одному из восьми октантов пространства с общей вершиной в точке A . Поэтому поток напряженности поля через любую охватывающую заряд замкнутую поверхность необходимо сначала разделить на 8 (число октантов пространства), а затем еще на 3 (число граней, не содержащих вершину A). Получаем ответ: $\Phi = 0$ через каждую грань, содержащую вершину A и $\Phi = \frac{Q}{24\epsilon_0}$ через каждую грань, не содержащую вершину A .

Пример 18.6. Точечный заряд $-q$ находится на расстоянии h от бесконечно большой проводящей плоскости. Определите значение заряда, индуцированного на плоскости.

Для решения задачи воспользуемся «методом электрических изображений». Сущность метода заключается в следующем. Пусть электрическое поле в пространстве создается системой точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_{N_1}, q'_1, q'_2, \dots, q'_{N_2}$ (рис. 18.4). Пусть поверхность S — одна из эквипотенциальных поверхностей поля. Она разбивает все пространство на две области I и II . Электрическое поле в зоне I можно определить, указав только значения зарядов q_1, q_2, \dots, q_{N_1} и потенциал поверхности S . Значения зарядов $q'_1, q'_2, \dots, q'_{N_2}$ для этого задавать не обязательно. Аналогично, поле в области II можно

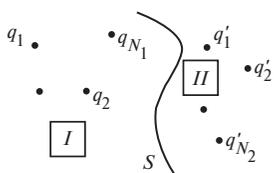


Рис. 18.4

определить, зная заряды $q'_1, q'_2, \dots, q'_{N_2}$ и потенциал поверхности S .

Заменим воображаемую эквипотенциальную поверхность S реальной проводящей поверхностью. Очевидно, что на ней образуются индуцированные заряды. Тогда можно сказать, что поле в зоне I можно

определить, указав только значения зарядов q_1, q_2, \dots, q_{N_1} и индуцированные заряды. Однако это означает, что поле индуцированных зарядов в зоне I эквивалентно полю зарядов $q'_1, q'_2, \dots, q'_{N_2}$. Совокупность зарядов $q'_1, q'_2, \dots, q'_{N_2}$ называется «электрическим изображением» зарядов q_1, q_2, \dots, q_{N_1} относительно поверхности S и наоборот.

Вернемся к исходной задаче. Подберем такую систему зарядов, для которой заданная проводящая плоскость будет эквипотенциальной поверхностью. Очевидно, что можно рассмотреть систему заданного заряда $-q$ и точечного заряда $+q$, расположенного на расстоянии h с другой стороны плоскости (рис. 18.5). Можно сказать, что заряд $+q$ — «электрическое изображение» заряда $-q$, т.е. заряд $+q$ создает такое же поле выше плоскости, что и индуцированные на ней заряды. Рассмотрим точку A , расположенную вблизи плоскости. Напряженность поля в этой точке найдем по принципу суперпозиции:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_-;$$

$$E_A = 2E_+ \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(h^2 + r^2)} \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{qh}{2\pi\epsilon_0(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

В соответствии с (17.1) $E_A = \sigma/\epsilon_0$, где σ — поверхностная плотность индуцированного на плоскости заряда. Тогда $\sigma = \frac{qh}{2\pi(h^2 + r^2)^{3/2}}$. Полный индуцированный на плоскости заряд

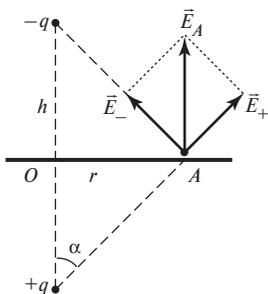


Рис. 18.5

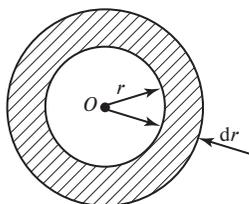


Рис. 18.6

определим так: $q_{\text{инд}} = \int \sigma \, dS$. Разобьем плоскость на систему концентрических колец с центрами в т. O , радиусами r и толщинами dr (рис. 18.6). Элемент площади поверхности $dS = 2\pi r \, dr$. Тогда

$$q_{\text{инд}} = \int_0^{\infty} \frac{qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}} r \, dr = q.$$

Пример 18.7. Воспользуемся результатами предыдущего примера и решим такую задачу. Маленький заряженный шар радиусом r находится на расстоянии a ($a > r$) от большой заземленной проводящей пластины. Некая силовая линия поля выходит из шара параллельно этой плоскости. Определите точку вхождения этой линии в пластину (рис. 18.7).

Условие $a \gg r$ позволяет считать шар точечным зарядом, а распределение заряда по его поверхности – равномерным. Пусть заряд шара равен q . Выберем гауссову поверхность особым образом: её основания – диски (верхний – диаметральное сечение шарика, нижний расположен внутри пластины и имеет радиус r_0), а боковая поверхность образована всеми указанными в условии силовыми линиями. Поток напряженности через такую гауссову поверхность равен нулю, так как по боковой поверхности силовые линии скользят, а там, где располагаются основания поверхности, поля нет. Поэтому и охваченный поверхностью заряд равен нулю. Поскольку индуцированный на пластине заряд равен $-q$, то заряд диска радиусом r_0 равен $-q/2$ (попробуйте доказать это из свойств симметричности задачи). Если разбить диск на кольца, как в предыдущем примере, то получим:

$$-\frac{q}{2} = \int_0^{r_0} \frac{qa}{(a^2 + r^2)^{3/2}} r \, dr.$$

Из этого выражения можно получить $r_0 = a\sqrt{3}$.

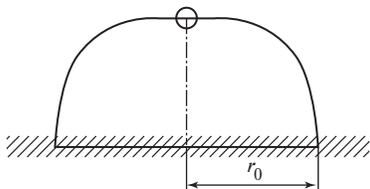


Рис. 18.7

Глава 19

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

В предыдущих главах были рассмотрены основные вопросы электростатики. Явления и процессы, связанные с движением электрических зарядов, составляют особую часть учения об электричестве — *электродинамику*. В электродинамике вводится понятие электрического тока. *Электрическим током* называют всякое упорядоченное движение электрических зарядов. Электрический ток возникает в проводниках при условии, что внутри проводника напряженность электрического поля отлична от нуля. Нас будет интересовать лишь один класс проводников, а именно металлы. Рассмотрим условия существования непрерывного электрического тока, введем его характеристики — силу тока и плотность тока, познакомимся с основными представлениями классической электронной теории электропроводности металлов, с законом Ома для неоднородного участка цепи.

19.1. Электрический ток и условия его существования

Электрический ток проводимости — упорядоченное движение заряженных частиц относительно среды (внутри макроскопических тел). В металлах свободными носителями зарядов являются электроны; в жидкостях (электролитах) — положительные и отрицательные ионы; в газах — электроны и ионы; в полупроводниках — электроны и «дырки». Это значит, что электрический ток может быть обусловлен движением как положительно, так и отрицательно заряженных носителей. За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные носители заряда.

Постоянный электрический ток — электрический ток, не изменяющийся во времени ни по значению, ни по направлению.

Упорядоченное движение свободных носителей зарядов возникает под действием сил электрического поля и характеризуется средней скоростью u . В то же время носители зарядов находятся в тепловом хаотическом движении со средней скоростью v . При наличии электрического тока нарушается равновесное распределение зарядов в проводнике: поверхность проводника уже не является эквипотенциальной, и силовые линии электрического поля не направлены перпендикулярно ей. Для движения зарядов необходимо, чтобы на

поверхности проводника тангенциальная составляющая напряженности электрического поля не равнялась нулю. Такое электрическое поле создается поверхностными зарядами, плотность которых изменяется по длине проводника (существует градиент поверхностной плотности заряда). Внутри проводника поверхностными зарядами создается электрическое поле, силовые линии которого повторяют форму проводника.

Необходимыми условиями для существования постоянного тока являются:

наличие свободных носителей зарядов, которые могли бы перемещаться на макроскопическое расстояние;

наличие замкнутой проводящей цепи;

наличие электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение электрических зарядов (для того чтобы ток был длительным, энергия поля должна все время пополняться, т.е. нужен источник электрической энергии).

19.2. Сила тока, плотность тока. Уравнение непрерывности

Сила тока I — скалярная величина, численно равная заряду, переносимому в единицу времени через поперечное сечение проводника. Если за время dt переносится заряд dq , то по определению сила тока

$$I = dq / dt. \quad (19.1)$$

Другой характеристикой тока является векторная величина — *плотность тока \vec{j}* . Модуль плотности тока равен отношению заряда, переносимого за единицу времени через поверхность, перпендикулярную к направлению движения носителей заряда, к площади этой поверхности.

Выделим внутри проводника с током поверхность площадью dS (рис. 19.1). За время dt эту поверхность пересечет заряд

$$dq = enu dt dS \cos \alpha = enu dt dS_{\perp},$$

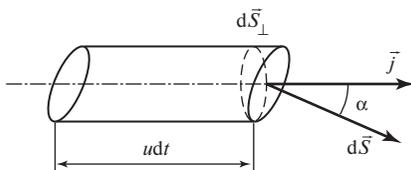


Рис. 19.1

где e — заряд электрона; n — концентрация электронов; u — средняя скорость упорядоченного движения; α — угол между нормалью к поверхности dS и направлением движения носителей.

Модуль плотности тока по определению

$$j = \frac{dq}{dt dS_{\perp}} = enu.$$

Направление вектора плотности тока совпадает с направлением вектора средней скорости упорядоченного движения носителей:

$$\vec{j} = en\vec{u}. \quad (19.2)$$

Силу тока через элементарную поверхность dS можно записать так:

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = \vec{j} d\vec{S}.$$

Сила тока в проводнике находится интегрированием последнего выражения по всему поперечному сечению проводника:

$$I = \int \vec{j} d\vec{S}. \quad (19.3)$$

Единица измерения силы тока *ампер* (А) является одной из основных единиц измерения в СИ. Определение этой единицы измерения будет дано позже при рассмотрении взаимодействия двух параллельных проводников с током.

Линии, вдоль которых движутся носители зарядов в проводниках, называются линиями тока. Касательные к линиям тока совпадают с направлением вектора \vec{j} в точке касания. Если внутри проводника с током мысленно выделить трубку, боковая поверхность которой образована линиями тока, то носители зарядов не будут пересекать боковую поверхность трубки и не будут ни выходить из трубки наружу, ни входить в трубку извне (рис. 19.2).

Рассмотрим внутри проводника с током произвольную замкнутую поверхность S (рис. 19.3). Пусть j_n — проекция вектора плотности тока \vec{j} на нормаль к элементу поверхности dS . Величина

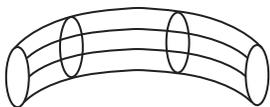


Рис. 19.2

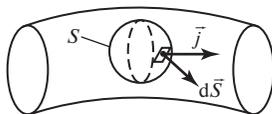


Рис. 19.3

положительного заряда, уходящего из объема, ограниченного поверхностью S , за единицу времени, равна убыли заряда в этом объеме:

$$\oint_S j_n dS = -\partial q/\partial t. \quad (19.4)$$

Последнее выражение называется *уравнением непрерывности*. Оно является следствием *закона сохранения заряда*.

В случае постоянных токов объемное распределение зарядов в проводнике не изменяется. Заряд, вошедший в единицу времени в выделенный объем, равен заряду, вышедшему из него за то же время, т.е. $\partial q/\partial t = 0$. Уравнение непрерывности принимает вид:

$$\oint_S j_n dS = 0. \quad (19.5)$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, можем записать $\oint_S j_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = 0$. Объем интегрирования V произволен и не равен нулю. Отсюда следует, что

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (19.6)$$

Это уравнение является наиболее общим выражением того факта, что постоянный ток не имеет истоков, т.е. что линии тока всегда либо замкнуты, либо уходят в бесконечность. Электрическое поле постоянных токов, как и поле электростатическое, является потенциальным, поэтому вектор напряженности поля \vec{E} может быть выражен через градиент потенциала: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Поскольку распределение зарядов для постоянных токов стационарно, то их поле должно быть тождественно с электростатическим полем соответственно распределенных неподвижных зарядов.

19.3. Закон Ома. Сопротивление проводников

В 1826 г. немецкий физик Г. Ом экспериментально установил закон, согласно которому *сила тока в однородном металлическом проводнике пропорциональна разности потенциалов на концах проводника*:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (19.7)$$

Однородный проводник — проводник, в котором на носители действуют только силы электростатического происхождения. Величина R , входящая в (19.7), называется **электрическим сопротивлением** проводника. Единицей измерения сопротивления служит ом (обозначается Ом), равный сопротивлению такого проводника, в котором при разности потенциалов 1 В существует ток силой 1 А.

Значение сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он изготовлен. Для однородного проводника длиной l с площадью поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (19.8)$$

где ρ — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств материала. Этот коэффициент называется **удельным электрическим сопротивлением** вещества. В СИ значение ρ измеряется в омах на метр (Ом · м).

Закон Ома можно записать в *дифференциальной форме*, установив таким образом связь между величинами, относящимися к одной и той же точке проводника. Выделим мысленно в окрестностях некоторой точки внутри проводника элементарный цилиндрический объем (рис. 19.4) с образующими, параллельными вектору плотности тока \vec{j} в данной точке. Сила тока в цилиндре равна $j dS$; разность потенциалов на торцах цилиндра равна $E dl$, где E — напряженность поля в данной точке. Электрическое сопротивление цилиндра согласно формуле (19.8) равно $\rho \frac{dl}{dS}$. Тогда закон Ома (19.7) можно

записать в виде $j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl$, или $j = \frac{E}{\rho}$.

Носители заряда в каждой точке движутся в направлении вектора напряженности электрического поля, поэтому

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \gamma \vec{E}, \quad (19.9)$$

где γ — величина, называемая **удельной электрической проводимостью** или просто **проводимостью** материала. Применив закон Ома в дифференциальной форме, выражение (19.6) можно переписать следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0.$$

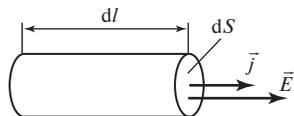


Рис. 19.4

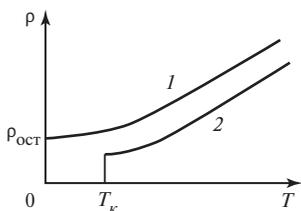


Рис. 19.5

Для однородного проводника $\gamma = \text{const}$, тогда $\text{div } \vec{E} = 0$. Сопоставляя этот результат с (17.25), можно сделать вывод, что при стационарных токах в однородном проводнике объемная плотность зарядов внутри проводника равна нулю. Заряды, создающие электрическое поле внутри проводника, находятся только на его поверхности. А поле, в свою очередь,

обеспечивает перемещение носителей заряда.

Способность вещества проводить ток характеризуется его удельным сопротивлением ρ или электрической проводимостью γ . Значения этих величин определяются химической природой вещества и внешними условиями (в частности, температурой), при которых оно находится. Для большинства металлов удельное сопротивление растет с температурой приблизительно по линейному закону $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, где ρ_0 — удельное сопротивление при 0°C ; t — температура по шкале Цельсия; α — температурный коэффициент электрического сопротивления, численно равный примерно $\frac{1}{273} (\text{C}^\circ)^{-1}$. Переходя к абсолютной температуре, получаем

$$\rho = \rho_0 \alpha T. \quad (19.10)$$

При низких температурах наблюдаются отклонения от этой закономерности (рис. 19.5). В большинстве случаев зависимость ρ от T имеет вид кривой 1. При этом при уменьшении температуры удельное сопротивление стремится к некоторому конечному значению $\rho_{\text{ост}}$. Значение $\rho_{\text{ост}}$ зависит от чистоты материала и остаточных механических напряжений в образце. У абсолютно чистых металлов с идеально правильной кристаллической решеткой при абсолютном нуле $\rho = 0$.

У большой группы металлов и сплавов при температуре, примерно равной нескольким кельвинам, удельное сопротивление скачком обращается в нуль (кривая 2 на рис. 19.5). Это явление, обнаруженное в 1911 г. голландским физиком Х. Камерлинг–Оннесом, называется *сверхпроводимостью*. Каждый материал этой группы имеет свою критическую температуру $T_{\text{к}}$, при которой наступает сверхпроводимость. Для создания условий сверхпроводимости проводники охлаждаются в жидком гелии при температуре 4 К. Такие сверхпроводящие системы являются очень дорогими и сложными устройствами, поэтому усилия ученых направлены на создание материалов, обладающих свойствами *высокотемпературной сверхпроводимости*.

19.4. Основные представления классической электронной теории электропроводности металлов

Электронная теория электропроводности металлов была впервые создана П. Друдом в 1900 г. и получила дальнейшее развитие в работах Х. Лоренца. Существование тока в проводнике, сопровождающееся выделением тепла, в рамках классических представлений объясняется следующим образом. Свободные электроны ускоряются электрическим полем, которое имеется внутри проводника. Закон Ньютона для движения электрона имеет вид

$$ma = eE, \quad (19.11)$$

где m , a , e — соответственно масса, ускорение и заряд электрона.

На самом деле движение электрона очень сложно, поскольку электроны находятся в тепловом хаотическом движении. Под влиянием внешнего электрического поля электроны получают одинаковое ускорение и приобретают дополнительную скорость в направлении поля. В результате возникает упорядоченное движение электронов, т. е. электрический ток. Упорядоченное движение электронов накладывается на их хаотическое тепловое движение, причем скорость хаотического движения электронов много больше скорости их упорядоченного движения (дрейфа). Оценки при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ и плотности тока $j = 1 \cdot 10^{11}$ А/м² дают следующие значения средней скорости v теплового движения и средней скорости u упорядоченного движения электронов:

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 10^5 \text{ м/с}; \quad u = \frac{j}{en} \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}, \quad \text{т. е. } v \gg u.$$

При своем движении электроны взаимодействуют один с другим и с атомами кристаллической решетки проводника. При взаимодействии с узлами кристаллической решетки электроны передают им часть своей энергии, приобретенной электронами под действием электрического поля. Допустим, что электрон ускоряется в течение времени τ , сталкивается с атомом и отдает ему всю приобретенную в электрическом поле кинетическую энергию. Затем он вновь ускоряется в течение времени τ и вновь сталкивается с атомом, отдавая ему свою энергию.

Определим путь, пройденный электроном в упорядоченном движении между двумя последовательными столкновениями:

$$S = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \tau^2, \quad (19.12)$$

где $\tau = \lambda/v$. Здесь τ , λ и v — соответственно среднее время между столкновениями, средняя длина свободного пробега между столкновениями и средняя скорость теплового движения электронов.

Средняя скорость упорядоченного движения

$$u = \frac{S}{\tau} = \frac{eE\lambda}{2mv}. \quad (19.13)$$

Согласно выражению (19.2) плотность тока

$$j = enu = \frac{e^2 n \lambda E}{2mv}, \quad (19.14)$$

где n — концентрация электронов.

Сравнивая (19.14) с законом Ома $j = \gamma E$, находим выражение для удельной электрической проводимости:

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{e^2 n \lambda}{mv}. \quad (19.15)$$

Классическая теория электропроводности весьма наглядна и дает правильную качественную зависимость плотности тока от напряженности поля. Однако она не приводит к правильным количественным результатам. Главные расхождения теории с экспериментом состоят в следующем:

1) для того чтобы по формуле (19.15) получить значения удельной электрической проводимости, совпадающие с экспериментальными, надо принять среднюю длину свободного пробега λ очень большой (значение λ должно в тысячи раз превосходить межатомные расстояния в металле). Понять возможность таких больших значений длин свободных пробегов затруднительно в рамках классической теории;

2) экспериментальная зависимость удельной электрической проводимости от температуры имеет вид $\gamma \sim 1/T$, в то время как из формулы (19.15) следует $\gamma \sim 1/\sqrt{T}$, поскольку

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \sim \frac{1}{\sqrt{T}};$$

3) по теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы следует ожидать от свободных электронов очень большого вклада в теплоемкость проводников, что в эксперименте не наблюдается.

Лишь квантовая теория позволяет последовательно разрешить эти противоречия. Квантовая теория учитывает волновые свойства микрочастиц. Важнейшей особенностью волнового движения является способность волн огибать препятствия благодаря дифракции. В результате при своем движении электроны как бы огибают атомы без столкновений и длины их свободного пробега могут быть весьма большими. Электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака,

согласно которой в образовании электронной теплоемкости может принимать участие лишь незначительная часть электронов. Решение задачи о движении электрона в проводнике в рамках квантовой механики приводит к зависимости $\gamma \sim 1/T$, что и наблюдается в действительности.

19.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Электродвижущая сила

Для того чтобы электрический ток существовал длительное время, необходимо наличие замкнутой цепи, свободных носителей зарядов и сторонних сил. В проводнике заряженные частицы движутся под действием электростатических сил в направлении от точки с большим потенциалом φ_1 к точке с меньшим потенциалом φ_2 . Сторонние силы (силы не электростатического происхождения) непрерывно отводят заряды от конца проводника с меньшим потенциалом φ_2 и подводят их к концу с большим потенциалом φ_1 (рис. 19.6).

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля всегда равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи, наряду с участками, на которых положительные заряды движутся в сторону убывания потенциала, должны иметься участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электростатического поля (см. изображенную пунктиром часть цепи на рис. 19.6).

Рассмотрим участок $1-2$ цепи (рис. 19.7). Предположим, что на этом участке действуют электростатические и сторонние силы, поля которых характеризуются напряженностями $\vec{E}_{\text{эл}}$ и $\vec{E}_{\text{стор}}$. Напряженность результирующего поля, действующего на электроны, равна сумме напряженностей кулоновского поля и поля сторонних сил:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{стор}}. \quad (19.16)$$

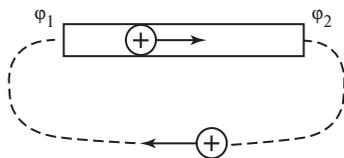


Рис. 19.6

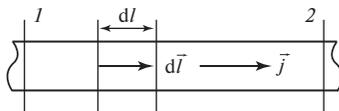


Рис. 19.7

Выделим бесконечно малый элемент проводника $d\vec{l}$ и запишем с учетом (19.16) закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} (\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (19.17)$$

Умножив левую и правую части выражения (19.17) на $\rho d\vec{l}$, получим:

$$\vec{j} \rho d\vec{l} = \vec{E}_{\text{эл}} d\vec{l} + \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (19.18)$$

Учтем, что все векторы в выражении (19.18) коллинеарны, поскольку являются касательными к линиям тока, а модуль плотности тока $j = I/S$, где I — сила тока в проводнике, S — площадь поперечного сечения проводника. Тогда выражение (19.18) можно переписать в виде

$$I \frac{\rho}{S} dl = E_{\text{эл}} dl + E_{\text{стор}} dl. \quad (19.19)$$

Проинтегрируем выражение (19.19) по длине участка проводника от сечения 1 до сечения 2 с учетом того, что сила тока в каждом сечении проводника одинакова:

$$I \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl = \int_1^2 E_{\text{эл}} dl + \int_1^2 E_{\text{стор}} dl. \quad (19.20)$$

Рассмотрим подробнее физический смысл всех слагаемых, входящих в выражение (19.20). Первое слагаемое численно равно удельной работе электростатических сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2, т.е. разности потенциалов между этими точками:

$$\int_1^2 E_{\text{эл}} dl = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (19.21)$$

Второе слагаемое численно равно удельной работе сторонних сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 и называется *электродвижущей силой* (ЭДС) \mathcal{E}_{12} , действующей на участке цепи 1—2:

$$\int_1^2 E_{\text{стор}} dl = \mathcal{E}_{12}. \quad (19.22)$$

Электродвижущая сила численно равна удельной работе сторонних сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2. Эта работа совершается источником энергии. Поэтому величину \mathcal{E}_{12} можно назвать электродвижущей силой источника энергии, включенного на участке цепи 1—2.

Падением напряжения на участке цепи $1-2$ называется величина IR_{12} , численно равная удельной работе, совершаемой суммарным полем электростатических и сторонних сил при перемещении заряда из точки 1 в точку 2 :

$$IR_{12} = \int_1^2 (\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{стор}}) d\vec{l}; \quad (19.23)$$

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (19.24)$$

Падение напряжения на участке цепи равно разности потенциалов только в том случае, если на этом участке не действуют сторонние силы. Величина, определяемая выражением

$$\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{12}, \quad (19.25)$$

называется **электрическим сопротивлением** участка цепи между сечениями 1 и 2 . Тогда соотношение (19.24) можно записать в виде

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \sum_i \mathcal{E}_i. \quad (19.26)$$

Это выражение является математической записью **обобщенного закона Ома для участка цепи**: произведение сопротивления участка цепи на силу тока в нем равно алгебраической сумме разности потенциалов на этом участке и ЭДС всех источников, включенных на участке.

При выводе уравнения (19.26) выделенный участок цепи обходили в направлении движения положительных зарядов — в направлении электрического тока (вектор $d\vec{l}$ совпадал с плотностью тока \vec{j}). В общем случае при определении IR_{12} и ЭДС \mathcal{E}_i нужно пользоваться следующим правилом знаков. Падение напряжения IR_{12} считается положительным, если направление тока соответствует направлению обхода участка цепи от точки 1 к точке 2 . В противном случае падение напряжения IR_{12} считается отрицательным. Значение ЭДС источника \mathcal{E}_i считается положительным, если направление обхода участка цепи от точки 1 к точке 2 соответствует перемещению внутри источника \mathcal{E}_i от отрицательного « \leftarrow » к положительному полюсу « \rightarrow ». В противном случае \mathcal{E}_i следует считать отрицательной. В самом общем случае, при рассмотрении участка цепи с различ-

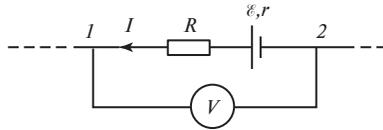


Рис. 19.8

ными резисторами и различными токами в них, выражение (19.26) следует записывать в виде

$$\sum_k (\pm IR)_k = (\varphi_1 - \varphi_2) + \sum_i (\pm E)_i.$$

Применим обобщенный закон Ома к участку цепи, изображенному на рис. 19.8. Выберем положительное направление тока, как показано на рисунке, и направление обхода от точки 1 к точке 2. Тогда для участка цепи $1 - R - \mathcal{E} - 2$ получим:

$$-I(R + r) = \varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}, \quad (19.27)$$

где r — внутреннее сопротивление источника тока. Применив обобщенный закон Ома к участку $1 - V - 2$ (обход через вольтметр), получим

$$I_V R_V = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (19.28)$$

где I_V — сила тока через вольтметр; R_V — сопротивление вольтметра. Произведение $I_V R_V$ равно разности потенциалов, измеренной вольтметром. Следовательно, вольтметр показывает разность потенциалов между точками его подключения.

Глава 20

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Магнитные явления были впервые обнаружены и изучены на естественных *магнитах*. Этим словом еще в Древней Греции были названы куски породы, добываемые вблизи г. Магнезия на территории современной Турции. Оказалось, что эти «магнитные камни» обладают способностью притягивать к себе куски железа. Однако понимание процессов, происходящих в магните, требует предварительного изучения более простых и фундаментальных явлений и понятий.

До сих пор рассматривались процессы, происходящие внутри проводников с токами. При рассмотрении электропроводности тел были сформулированы законы постоянного тока. Однако эти законы не описывают всех явлений, наблюдаемых при прохождении электрического тока в проводниках. Опыты показали, что вокруг проводников с током так же, как и вокруг постоянных магнитов, существует силовое поле, которое легко можно обнаружить по его действию на движущиеся электрические заряды, другие проводники с токами и постоянные магниты. *Магнитное поле* — форма существования материи, посредством которой осуществляется действие на движущиеся электрические заряды и постоянные магниты со стороны других движущихся зарядов и постоянных магнитов.

Постоянные магниты оказывают ориентирующее действие на магнитную стрелку, помещенную вблизи них. Постоянное магнитное поле не действует на неподвижные электрически заряженные частицы и тела. В свою очередь эти заряженные частицы и тела не действуют на помещенную вблизи них магнитную стрелку, т.е. не создают магнитное поле.

20.1. Магнитная индукция. Закон Био — Савара — Лапласа

Исследования электромагнитных явлений были начаты в опытах датского физика Х. Эрстеда в 1820 г. Он обнаружил, что при пропускании по прямолинейному горизонтальному проводнику постоянного тока находящаяся под ним стрелка компаса поворачивается вокруг своей вертикальной оси, располагаясь перпендикулярно проводнику с током (рис. 20.1).

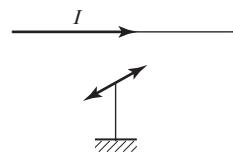


Рис. 20.1

В дальнейшем в аналогичных опытах исследовалось действие на магнитную стрелку электрического тока, протекающего по проводникам различной формы. Экспериментально доказано, что *при создании в проводнике электрического тока вокруг проводника возникает магнитное поле, действующее на помещенную в это поле магнитную стрелку*. При этом материал проводника и характер его проводимости (электронный или ионный), а также происходящие в проводнике процессы не влияют на создаваемое им магнитное поле. Поскольку ток в проводнике — это упорядоченное движение электрических зарядов, то *вокруг всякого движущегося заряда должно существовать магнитное поле*. Электрическое поле, существующее вокруг любого электрического заряда, действует как на неподвижные, так и на движущиеся электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует только на движущиеся в этом поле электрические заряды. Поэтому между двумя движущимися одна относительно другой заряженными частицами существуют и электрическое, и магнитное взаимодействия.

Существование магнитного поля в какой-либо области пространства можно обнаружить по его силовому действию либо на движущуюся заряженную частицу, либо на элемент проводника с током, либо на виток с током (замкнутый ток).

Если через какую-либо точку пространства, в котором существует магнитное поле, движется заряженная частица, то со стороны магнитного поля на нее действует сила, и частица отклоняется от первоначального направления движения. Направление силы зависит от направления скорости частицы и знака ее заряда, а модуль силы определяется зарядом частицы q , модулем ее скорости v и направлением движения частицы в поле. Если вектор скорости частицы направлен определенным образом, модуль силы достигает максимального значения при неизменных q и $|\vec{v}|$. Оказывается, что отношение модуля максимальной силы к произведению заряда частицы и модуля ее скорости постоянно в данной точке поля:

$$\frac{F_{\max}}{qv} = \text{const}. \quad (20.1)$$

Если в ту же область магнитного поля поместить прямолинейный элемент проводника длиной l , в котором существует ток силой I , то со стороны магнитного поля на проводник с током будет действовать сила, что можно обнаружить по отклонению проводника от исходного положения. Направление силы зависит от ориентации проводника в поле. Кроме того, в зависимости от ориентации проводника, модуль силы будет принимать различные значения, а в некотором положении на проводник будет действовать максимальная сила.

Оказывается, что отношение модуля максимальной силы к произведению силы тока и длины проводника постоянно в данной точке поля:

$$\frac{F_{\max}}{Il} = \text{const}. \quad (20.2)$$

Если в ту же область магнитного поля поместить рамку (виток) с током малых размеров, то со стороны магнитного поля на нее будет действовать момент сил, поворачивающий рамку вокруг некоторой оси. Направление вращающего момента зависит от направления тока в рамке и ее ориентации, а момент силы зависит от силы тока в рамке, ее площади и первоначальной ориентации рамки в поле. При определенной ориентации рамки момент силы примет максимальное значение. Отношение модуля максимального момента к произведению силы тока в рамке на ее площадь постоянно в данной точке поля:

$$\frac{M_{\max}}{IS} = \text{const}. \quad (20.3)$$

Постоянная величина, определяемая выражениями (20.1)—(20.3), является характеристикой магнитного поля в исследуемой точке пространства. По своему физическому смыслу она определяет силовое действие магнитного поля на движущиеся заряженные частицы и называется магнитной индукцией B .

Магнитная индукция — векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля. Как уже было сказано, магнитная индукция определяется одним из трех соотношений:

$$B = \frac{F_{\max}}{qv}; \quad B = \frac{F_{\max}}{Il}; \quad B = \frac{M_{\max}}{IS}. \quad (20.4)$$

Поскольку в числителях выражений (20.4) стоят модули векторных величин и направления этих векторов экспериментально определены, то и магнитная индукция должна быть векторной величиной, имеющей определенное направление в пространстве.

По результатам экспериментальных исследований была «сконструирована» формула магнитной индукции магнитного поля, возникающего вблизи частицы, обладающей положительным зарядом q и движущейся со скоростью \vec{v} :

$$\vec{B} = k \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (20.5)$$

где \vec{r} — радиус-вектор, проведенный от движущегося заряда q (источника поля) в рассматриваемую точку пространства (рис. 20.2).

Напомним, что, в соответствии с определением векторного произведения, вектор \vec{B} перпендикулярен каждому из векторов \vec{v} и \vec{r} . Если источником поля будет движущаяся в том же направлении отрицательно заряженная частица, то направление \vec{B} противоположно тому, которое указано на рис. 20.2.

Единица измерения магнитной индукции в СИ называется **тесла** (в честь американского электротехника Н. Тесла) и обозначается Тл. Таким образом, $[B] = \text{Тл}$. Коэффициент пропорциональности k в формуле (20.5) зависит от выбора системы единиц. В СИ принимается, что

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}, \quad (20.6)$$

где μ_0 — коэффициент, называемый **магнитной постоянной**:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}. \quad (20.7)$$

Если магнитное поле создается системой движущихся зарядов, то для нахождения результирующей магнитной индукции в любой точке пространства справедлив **принцип суперпозиции магнитных полей** (**принцип независимости действия магнитных полей**):

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i, \quad (20.8)$$

т.е. *магнитная индукция поля, созданного системой движущихся зарядов в любой точке пространства, равна векторной сумме магнитных индукций полей, созданных каждым движущимся зарядом в этой точке в отдельности.*

Определим с помощью принципа суперпозиции (20.8) и соотношения (20.5) магнитную индукцию поля, создаваемого элементом проводника с током (рис. 20.3) в некоторой точке пространства.

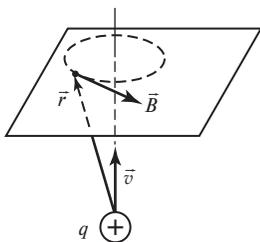


Рис. 20.2

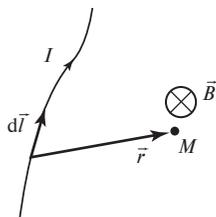


Рис. 20.3

Поскольку электрический ток — это направленное движение заряженных частиц, за направление которого принято направление движения положительных зарядов, магнитное поле в точке M будет создаваться всеми движущимися по проводнику частицами, сосредоточенными в выбранном элементе проводника длиной dl . Если концентрация свободных носителей заряда в проводнике n , то число заряженных частиц в данном элементе проводника $dN = nS dl$. Пусть каждая из частиц обладает зарядом q . Согласно (20.5) и (20.8) запишем элементарную магнитную индукцию $d\vec{B}$ (т.е. магнитную индукцию поля, созданного элементом проводника) в точке M :

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= k \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} dN = k \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} nS dl = \\ &= k \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} nS dl \frac{v}{v} = k \frac{qnSv}{r^3} \left[\frac{\vec{v}}{v} dl, \vec{r} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку сила тока в проводнике $I = qnSv$, а соотношение $\frac{\vec{v}}{v} dl$ определяет вектор $d\vec{l}$, то $d\vec{B}$ запишется в виде

$$d\vec{B} = k \frac{I}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]. \quad (20.9)$$

Магнитная индукция поля, созданного в произвольной точке пространства элементом dl проводника с током силой I прямо пропорциональна произведению силы тока на векторное произведение элемента длины проводника на радиус-вектор, проведенный от этого элемента в точку, и обратно пропорциональна кубу длины радиус-вектора. Это утверждение называется **законом Био—Савара—Лапласа**. Математическую форму закону придал в 1820 г. французский математик П.С. Лаплас, обобщив результаты исследований Ж.Б. Био и Ф. Савара.

Определим с помощью этого закона магнитные индукции некоторых магнитных полей.

Пример 20.1. Определим магнитную индукцию магнитного поля прямолинейного проводника с током (рис. 20.4). Пусть исследуемая точка M находится на кратчайшем расстоянии x от проводника. Выделим в проводнике элемент длиной dl , которому будет соответствовать вектор $d\vec{l}$. Проведем от этого элемента радиус-вектор \vec{r} в точку M . Согласно закону Био—Савара—Лапласа, элементарная магнитная индукция поля, создаваемого в точке M этим элементом проводника, определяется выражением (20.9), а направление вектора

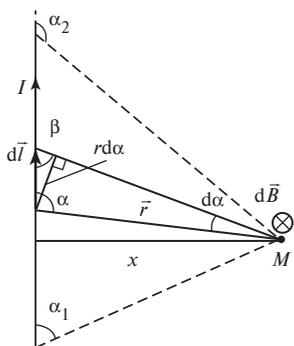


Рис. 20.4

$d\vec{B}$ — правилом векторного произведения: если правый винт вращать по кратчайшему пути от первого множителя произведения (вектора $d\vec{l}$) ко второму множителю (вектору \vec{r}), то поступательное движение винта укажет направление $d\vec{B}$. На рис. 20.4 показано, что вектор $d\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка «от нас».

Проводник можно представить в виде бесконечно большого числа элементарных отрезков с током. Каждый из них в рассматриваемой точке создает магнитное поле с элементарной индукцией $d\vec{B}$. Направления всех векторов $d\vec{B}$ совпадают, поэтому согласно принципу суперпозиции (20.8) $\vec{B} = \int d\vec{B}$ причем $|\vec{B}| = \int dB$.

Модуль элементарной индукции dB можно найти следующим образом: согласно закону Био—Савара—Лапласа

$$dB = k \frac{I}{r^3} |[d\vec{l}, \vec{r}]| = k \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha, \quad (20.10)$$

где α — угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} . Поскольку элемент $d\vec{l}$ виден из точки M под малым углом $d\alpha$, то $\sin \alpha \approx \sin \beta$, $dl \sin \alpha = dl \sin \beta = r d\alpha$, так как отрезок $r d\alpha$ практически совпадает с дугой окружности радиусом r с центром в точке M . Наконец,

$$r = \frac{x}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

Подставляя полученные выше соотношения в (20.10), получаем:

$$dB = k \frac{I}{x} \sin \alpha d\alpha.$$

Тогда

$$B = \int dB = k \frac{I}{x} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = k \frac{I}{x} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (20.11)$$

где α_1 и α_2 — углы между направлением тока в проводнике и направлениями к точке M из начала и конца проводника (см. рис. 20.4).

Из (20.11) можно получить выражение для модуля индукции магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током. Таким объектом будет отрезок прямого провода, если исследуемая точка M находится настолько близко к проводу, что расстояние x во много раз меньше расстояний от точки M до концов отрезка проводника, т.е. границы проводника не видны из точки M . Следовательно $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$. Формула (20.11) в СИ принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}. \quad (20.12)$$

Для определения направления вектора \vec{B} в произвольной точке применимо следующее правило (*правило правого винта*, или «правило буравчика»): *если ввинчивать правый винт по направлению тока в прямолинейном проводнике, то направление движения рукоятки винта укажет направление вектора магнитной индукции в каждой точке пространства*. На рис. 20.5 показано, что во всех точках плоскости рисунка слева от проводника векторы \vec{B} направлены перпендикулярно плоскости рисунка «на нас», а во всех точках справа от проводника — «от нас».

Если рассмотреть направление векторов \vec{B} в различных точках, то можно сделать такой вывод: векторы магнитной индукции магнитного поля прямолинейного бесконечного проводника с током расположены в плоскостях, перпендикулярных проводнику, причем в точках, равноудаленных от проводника, модули векторов одинаковы. Для графического изображения стационарного, т.е. не изменяющегося во времени, магнитного поля пользуются методом линий магнитной индукции.

Линиями магнитной индукции называются воображаемые линии, проведенные так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной индукции совпадает с направлением вектора \vec{B} в этой точке поля. Линии магнитной индукции можно наблюдать с помощью мелких игольчатых железных опилок, которые намагничиваются в исследуемом поле и ведут себя подобно маленьким магнитным стрелкам, разворачиваясь вдоль линий магнитной индукции. Подобный метод графической иллюстрации магнитного поля напоминает изображение электрических полей с помощью силовых линий. Так же как и силовые линии электрических полей, линии магнитной индукции не пересекаются и не соприкасаются. Однако есть

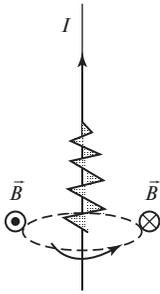


Рис. 20.5

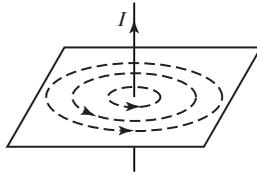


Рис. 20.6

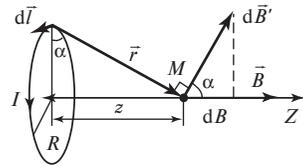


Рис. 20.7

существенные отличия свойств силовых линий электростатического поля и линий магнитной индукции.

Во-первых, силовые линии в каждой точке указывают направление силы, действующей на заряд в электрическом поле (отсюда и название), а направление линий магнитной индукции не указывает направление силы, действующей на движущийся заряд в магнитном поле; поэтому их не рекомендуется называть силовыми линиями магнитного поля.

Во-вторых, силовые линии электростатического поля начинаются и заканчиваются на зарядах, а линии магнитной индукции замкнуты.

Будем называть магнитное поле однородным, если во всех его точках векторы индукции \vec{B} совпадают по модулю и направлению. В этом случае линии магнитной индукции параллельны одна другой, т.е. замыкаются на бесконечно большом удалении от рассматриваемой точки пространства. Однородным можно считать магнитное поле между полюсами постоянного магнита.

В случае бесконечно длинного прямолинейного проводника с током линии магнитной индукции образуют систему концентрических окружностей, центры которых расположены на проводнике, а плоскости окружностей перпендикулярны проводнику (рис. 20.6). Направления линий магнитной индукции определены по правилу буравчика.

Пример 20.2. Определим магнитную индукцию магнитного поля кругового витка радиусом R с током силой I (рис. 20.7).

Пусть исследуемая точка M находится на его оси на расстоянии z от плоскости витка. На рис. 20.7 плоскость витка с током перпендикулярна плоскости рисунка. Выделим в витке элемент длиной $d\vec{l}$, которому будет соответствовать вектор $d\vec{l}$. Пусть это будет эле-

мент, расположенный так, что вектор $d\vec{l}$ направлен «на нас». Проведем от этого элемента радиус-вектор \vec{r} в точку M . Согласно закону Био—Савара—Лапласа, элементарная магнитная индукция $d\vec{B}'$, создаваемая в точке M этим элементом проводника, будет определяться выражением (20.9). Направление вектора $d\vec{B}'$ определим по правилу векторного произведения: если правый винт вращать по кратчайшему пути от первого сомножителя произведения (вектора $d\vec{l}$) ко второму сомножителю (вектору \vec{r}), то поступательное движение винта укажет направление $d\vec{B}'$.

На рис. 20.7 показано, что вектор $d\vec{B}'$ направлен в плоскости рисунка перпендикулярно вектору \vec{r} . Если рассмотреть различные элементы витка, то можно сделать вывод, что все элементарные индукции $d\vec{B}'$ будут направлены в точке M под одним и тем же углом α к оси витка, причем их модули будут одинаковы. Из условий симметрии следует, что вектор магнитной индукции поля, создаваемого всем витком с током, будет направлен вдоль оси витка Z . Поэтому нужно суммировать проекции элементарной магнитной индукции на ось Z . Тогда согласно принципу суперпозиции (20.8)

$$|\vec{B}| = \int dB,$$

где $dB = dB' \cos \alpha = k \frac{I dl}{r^2} \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha$; $r^2 = R^2 + z^2$; $\cos \alpha = \frac{R}{r}$.

Таким образом,

$$B = \int_0^{2\pi R} k \frac{IR dl}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = k \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (20.13)$$

Это выражение в СИ принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (20.14)$$

График зависимости магнитной индукции на оси витка от координаты z приведен на рис. 20.8.

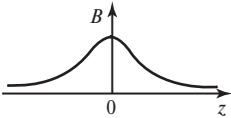


Рис. 20. 8

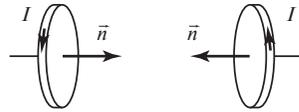


Рис. 20. 9

Из (20.14) легко получить выражение для модуля магнитной индукции в центре кругового витка с током ($z = 0$):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (20.15)$$

Магнитным моментом витка с током \vec{p}_m называется вектор, модуль которого равен произведению силы тока в витке I на площадь витка S , а направление совпадает с единичным вектором нормали к витку:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}. \quad (20.16)$$

Направление вектора \vec{n} согласовано с направлением тока в витке по правилу буравчика (рис. 20.9).

С учетом \vec{p}_m выражение (20.14) имеет вид

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (20.17)$$

20.2. Теорема о циркуляции магнитной индукции

Определим **циркуляцию магнитной индукции** вдоль произвольного замкнутого контура. Сначала рассмотрим магнитное поле, созданное длинным прямолинейным проводником с током силой I . Линии магнитной индукции поля такого проводника представляют собой окружности, центры которых совпадают с осью проводника. На рис. 20.10 пунктирной окружностью показана одна из линий магнитной индукции. Проводник расположен перпендикулярно плоскости рисунка. Ток в проводнике направлен в плоскость чертежа «от нас».

Модуль магнитной индукции в каждой точке окружности радиусом r определяется по формуле (20.12):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

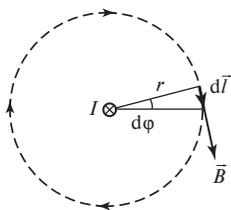


Рис. 20.10

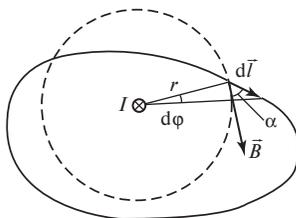


Рис. 20.11

Направление \vec{B} при выбранном направлении тока в проводнике определяется в соответствии с правилом буравчика и указано на рис. 20.10. Вычислим циркуляцию магнитной индукции вдоль контура, совпадающего с линией магнитной индукции, причем направление обхода контура выберем по часовой стрелке. Элемент окружности $d\vec{l}$ совпадает в каждой точке по направлению с вектором \vec{B} . Тогда

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos(\widehat{\vec{B}, d\vec{l}}) = B dl = Br d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi,$$

где $d\varphi$ — угол, под которым элемент $d\vec{l}$ виден из центра окружности. Циркуляция магнитной индукции по всему замкнутому контуру определяется следующим соотношением:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I. \quad (20.18)$$

Таким образом, в отличие от циркуляции напряженности электростатического поля, циркуляция магнитной индукции по замкнутому контуру не равна нулю, следовательно, магнитное поле не является потенциальным.

Теперь найдем циркуляцию магнитной индукции вдоль произвольного контура L , не совпадающего с линией магнитной индукции (рис. 20.11). Учитывая, что $dl \cos \alpha = r d\varphi$, можем записать:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos \alpha = Br d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi.$$

Интегрируя по углу от 0 до 2π , получаем:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

Приведенный вывод повторяет результат, полученный в соотношении (20.18). Отметим, что в случаях, изображенных на рис. 20.10 и 20.11, проводник с током пересекал поверхность, ограниченную контуром L . Такой проводник (или ток) называют **проводником (током), сцепленным с контуром**.

Рассмотрим, чему будет равна циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру, не охватывающему ток (рис. 20.12). В этом случае весь контур L разбивается на две части — L_1 и L_2 . На части контура L_1 угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} острый

$[\cos(\vec{B}, \widehat{d\vec{l}}) > 0]$, а на части контура L_2 угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} тупой $[\cos(\vec{B}, \widehat{d\vec{l}}) < 0]$. Тогда

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi} d\varphi - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi - \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Итак, если ток не сцеплен с контуром, то циркуляция магнитной индукции по такому контуру равна нулю.

Если магнитное поле создается системой токов, то из принципа суперпозиции магнитных полей следует, что в правой части (20.18) необходимо будет записать алгебраическую сумму токов, сцепленных с контуром. При этом знак тока определяется в соответствии с выбранным направлением обхода контура. Если направление тока и направление обхода контура согласуются с правилом правого винта, то сила тока берется со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус. Если получено положительное значение циркуляции магнитной индукции, то это означает, что угол между направлениями

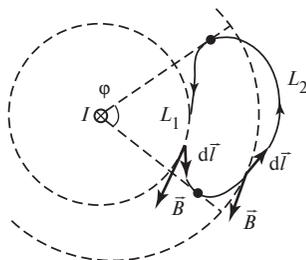


Рис. 20.12

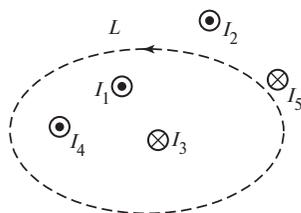


Рис. 20.13

магнитной индукции и элемента контура $d\vec{l}$ является острым. Рисунок 20.13 и выражение (20.19) иллюстрируют правило знаков:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0(I_1 - I_3 + I_4). \quad (20.19)$$

Таким образом, циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру прямо пропорциональна алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_{i \text{ сщ}}. \quad (20.20)$$

Теорему о циркуляции магнитной индукции называют также **законом полного тока** для магнитного поля.

Поскольку циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру в общем случае отлична от нуля, то магнитное поле не является потенциальным. Оно относится к *вихревым* физическим полям. Вихревой характер поля означает, что его линии магнитной индукции замкнуты сами на себя, а неподвижные «магнитные заряды», создающие такое поле, в природе отсутствуют.

Рассмотрим методику применения закона полного тока для определения магнитной индукции различных полей. Этот закон удобно использовать для расчета магнитной индукции таких магнитных полей, которые создаются симметричными системами токов. В этом случае можно так выбрать контур интегрирования, что циркуляция магнитной индукции поля по нему легко выражается через искомое значение модуля вектора \vec{B} . Решение задачи о нахождении индукции поля в какой-либо точке пространства должно осуществляться следующим образом:

1) исходя из симметрии распределения заданной системы токов в пространстве, необходимо построить линии магнитной индукции поля, т.е. определить направление вектора \vec{B} в любой точке пространства;

2) выбрать «удобный» замкнутый контур интегрирования, отвечающий следующим требованиям:

- а) контур должен проходить через исследуемую точку;
- б) длина контура должна быть известна;
- в) модуль индукции поля должен быть постоянен в точках всего контура или хотя бы его части;

г) угол между вектором \vec{B} и касательной к контуру должен быть известен в любой точке контура (это обеспечивается выполнением п. 1);

3) определить циркуляцию магнитной индукции по выбранному замкнутому контуру:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 \int_{L_1} \cos(\widehat{\vec{B}, d\vec{l}}) dl + B_2 \int_{L_2} \cos(\widehat{\vec{B}, d\vec{l}}) dl + \dots + B_n \int_{L_n} \cos(\widehat{\vec{B}, d\vec{l}}) dl,$$

где B_i — постоянный модуль магнитной индукции во всех точках части контура l_i ;

4) определить алгебраическую сумму токов, сцепленных с контуром;

5) применить теорему, т.е. приравнять результаты, полученные в пп. 3 и 4, с учетом коэффициента пропорциональности μ_0 .

Пример 20.3. Определим магнитную индукцию поля бесконечно длинного соленоида. Таким термином называется катушка, образованная одинаковыми плотно прилегающими один к другому витками (рис. 20.14), причем длина катушки существенно больше ее диаметра.

Изобразим на рис. 20.15 фрагмент центральной части соленоида, указав направления тока в его витках. Выберем контур интегрирования L , состоящий из четырех участков. Первый участок длиной l_1 проведем вдоль оси соленоида. Вблизи оси соленоида магнитное

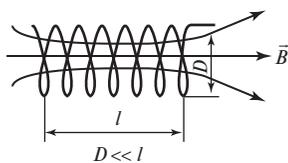


Рис. 20.14

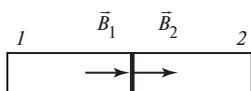


Рис. 20.16

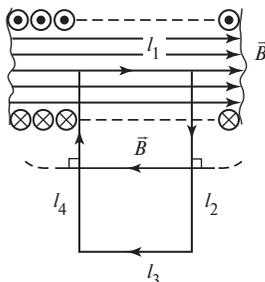


Рис. 20.15

поле можно считать однородным. Здесь линии магнитной индукции параллельны оси, а модуль индукции не изменяется.

Участки контура l_2 и l_4 проведем так, чтобы они были перпендикулярны линиям магнитной индукции. Замкнем контур участком l_3 настолько далеком от оси соленоида, чтобы магнитную индукцию в точках этого участка контура можно было бы принять равной нулю. При таком выборе контура циркуляция магнитной индукции будет отлична от нуля только на участке l_1 :

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} B dl = B l_1. \quad (20.21)$$

Алгебраическая сумма токов, сцепленных с контуром L , определится числом токов в витках соленоида, расположенных на длине отрезка l_1 :

$$\sum_{i=1}^n I_{i \text{ сц}} = In l_1, \quad (20.22)$$

где n — число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины. Применим закон полного тока, приравняв выражения (20.21) и (20.22), с учетом коэффициента μ_0 :

$$B l_1 = \mu_0 In l_1. \quad (20.23)$$

Тогда модуль магнитной индукции в центре бесконечно длинного соленоида на его оси

$$B_{\text{центр}} = \mu_0 In. \quad (20.24)$$

Найдем модуль магнитной индукции в центре основания бесконечно длинного соленоида. Для этого магнитную индукцию в среднем сечении такого соленоида представим суммой магнитных индукций, создаваемых левой 1 и правой 2 бесконечно длинными половинами соленоида (рис. 20.16): $B = B_1 + B_2$. Поскольку $B_1 = B_2 = B_{\text{основ}}$, то

$$B_{\text{основ}} = \frac{1}{2} \mu_0 In. \quad (20.25)$$

20.3. Движение заряженной частицы в магнитном и электрическом полях. Эффект Холла

Экспериментально обнаружено, что магнитное поле действует на движущиеся в нем частицы, имеющие электрические заряды (см. § 20.1). В соответствии с (20.1), магнитная индукция равна отношению максимальной силы, действующей со стороны магнитного

поля на заряженную частицу, движущуюся со скоростью \vec{v} , к произведению заряда на скорость частицы. Если заряженная частица влетает в магнитное поле (рис. 20.17), то сила \vec{F} , действующая со стороны поля, перпендикулярна скорости частицы и вектору магнитной индукции \vec{B} :

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (20.26)$$

Отсюда следует, что $\vec{F} \uparrow\uparrow [\vec{v}, \vec{B}]$ при $q > 0$ и $\vec{F} \uparrow\downarrow [\vec{v}, \vec{B}]$ при $q < 0$.

Эти случаи поясняются с помощью рис. 20.17. Направление силы \vec{F} согласно (20.26) можно определить по *правилу «левой руки»*: если расположить кисть левой руки так, чтобы четыре пальца показывали направление скорости частицы, а линии магнитной индукции входили в раскрытую ладонь, то отогнутый под прямым углом большой палец покажет направление силы, действующей на положительно заряженную частицу. Если заряд частицы отрицателен, направление силы будет противоположным.

Поскольку сила, действующая на частицу, перпендикулярна ее скорости, ускорение, сообщаемое этой силой, тоже перпендикулярно скорости частицы и является *нормальным ускорением*. Под действием этой силы траектория частицы будет искривляться.

Из (20.26) следует, что, если заряженная частица влетает в поле вдоль линий магнитной индукции, сила на частицу не действует. Если же частица влетает в поле перпендикулярно линиям магнитной индукции, то сила, действующая на частицу, является максимальной: $F = qvB$. Запишем второй закон Ньютона для заряженной частицы, движущейся в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной

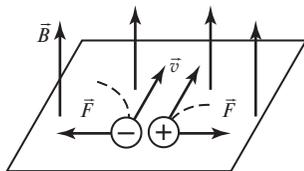


Рис. 20.17

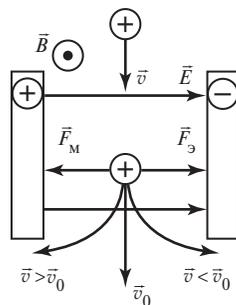


Рис. 20.18

индукции: $F = ma_n$, или $qvB = m \frac{v^2}{R}$, где m — масса частицы, а R — радиус кривизны траектории. Если поле однородно ($B = \text{const}$), то R является радиусом окружности

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (20.27)$$

Период обращения частицы по этой окружности не зависит от скорости частицы: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$.

Движение частицы в магнитное поле осуществляется с постоянной скоростью, кинетическая энергия частицы не изменяется. Это является следствием того, что сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля, не совершает работы ($\vec{F} \perp \vec{v}$, $\vec{F} \perp \Delta \vec{r}$).

Если же заряженная частица движется в электрическом и магнитном полях, то в соответствии с (15.5) и (20.26) на нее действует сила

$$\vec{F}_Л = q\vec{E} + q[\vec{v} \vec{B}]. \quad (20.28)$$

Эта сила называется **силой Лоренца** (в честь голландского физика Х.-А. Лоренца, получившего в 1902 г. Нобелевскую премию за исследование влияния магнетизма на процессы излучения). Первое слагаемое выражения (20.28) определяет электрический компонент силы Лоренца, а второе — магнитный.

Рассмотрим некоторые примеры практического использования воздействия магнитного и электрического полей на заряженные частицы. На рис. 20.18 показана схема работы сепаратора частиц, т.е. устройства, разделяющего пучок частиц по их скоростям или энергиям.

В таком устройстве существует область, в которой созданы однородные электрическое и магнитное поля. Векторы напряженности и магнитной индукции этих полей взаимно перпендикулярны. На рисунке вектор магнитной индукции направлен из плоскости чертежа «на нас», а вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости чертежа и направлен вправо. Пусть в сепаратор влетает пучок одинаковых положительно заряженных частиц, имеющих разные скорости. Тогда если частицы движутся так, что $\vec{v} \perp \vec{B}$ и $\vec{v} \perp \vec{E}$, то электрическая и магнитная составляющие силы Лоренца

направлены в противоположные стороны. При определенном значении модуля скорости v_0 эти составляющие равны:

$$qv_0B = qE;$$

$$v_0 = E/B.$$

Это означает, что все частицы пучка, модули скоростей которых равны v_0 , пролетают сепаратор, не отклоняясь от своего первоначального направления. Частицы пучка, модули скоростей которых больше, чем v_0 , отклонятся влево. Для них $qvB > qE$, т.е. магнитная составляющая силы Лоренца превосходит электрическую составляющую. Остальные частицы отклонятся вправо, так как для них $qvB < qE$. Таким образом, на выходе из сепаратора будет получен **моноэнергетический** пучок частиц, т.е. пучок частиц, обладающих одинаковой кинетической энергией.

Если пучок образован частицами разных масс, то дальнейшее воздействие на него однородного магнитного поля способно разделить частицы по массе. На этом основано действие масс-спектрометра (рис. 20.19).

Пусть пучок частиц, прошедших сепаратор, попадает в однородное магнитное поле, магнитная индукция которого перпендикулярна скорости частиц. Тогда частицы пучка, масса которых равна m_i , будут согласно (20.27) в дальнейшем двигаться по окружности радиусом

$$R_i = \frac{m_i v}{qB}.$$

Чем больше удельный заряд частицы (отношение ее заряда к массе q_i/m_i), тем меньше радиус её траектории при той же скорости и индукции магнитного поля. Таким образом, масс-спектрометр позволяет установить состав исследуемого пучка частиц, рассортировав его по значениям удельного заряда.

Воздействие магнитного поля на пучки движущихся частиц приводит иногда к неожиданным экспериментальным результатам. В

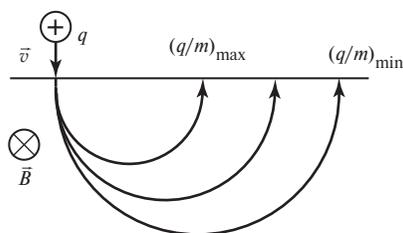


Рис. 20.19

1879 г. американский физик Э.Г. Холл обнаружил эффект, названный впоследствии его именем. *Эффектом Холла* называется возникновение в проводнике с током, помещенном в магнитное поле, разности потенциалов в направлении, перпендикулярном векторам плотности тока и магнитной индукции.

Для объяснения этого эффекта рассмотрим фрагмент плоского металлического проводника толщиной b , в котором электрическим полем с напряженностью \vec{E}_{\parallel} создан электрический ток плотностью \vec{j} (рис. 20.20, а). При отсутствии магнитного поля свободные электроны металла упорядоченно движутся со скоростью \vec{u} , направленной противоположно вектору плотности тока \vec{j} . Если проводник поместить в магнитное поле так, что $\vec{B} \perp \vec{j}$, то на электроны будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца \vec{F}_M , направление которой показано на рисунке. Ее действие приведет к поперечному смещению электронов, в результате чего между верхней и нижней поверхностями проводника появится электрическое поле разделенных зарядов. Если проводник достаточно тонкий, то возникшее электрическое поле с напряженностью \vec{E}_{\perp} можно считать однородным. Процесс смещения электронов прекратится, когда компенсируются силы, действующие на них со стороны магнитного и электрического полей: $e u B = e E_{\perp}$. В проводнике установится электрическое поле с напряженностью $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ (рис. 20.20, б). Изменение направления напряженности электрического поля в проводнике приведет к изменению положения эквипотенциальных плоскостей (эквипотенциальные плоскости перпендикулярны \vec{E}). Ранее такая плоскость проходила через точки M и N проводника

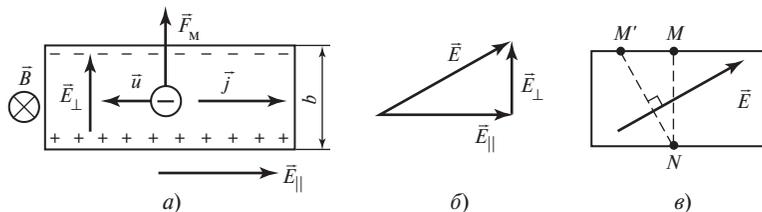


Рис. 20.20

(рис. 20.20, в). Теперь она пройдет через точки M' и N . Поэтому между точками M и N возникнет разность потенциалов

$$\varphi_N - \varphi_M = E_{\perp} b = uVb.$$

Поскольку $j = uen$, где n — концентрация свободных электронов в металле, то

$$\varphi_N - \varphi_M = \frac{j}{en} Bb. \quad (20.29)$$

Эта разность потенциалов называется **холловской разностью потенциалов**, ее экспериментальное измерение при заданных размерах проводника и силе тока в нем позволяет определить магнитную индукцию поля, в которое помещен датчик Холла. Это один из основных методов измерения магнитной индукции постоянных магнитных полей.

20.4. Действие магнитного поля на проводник и контур с током. Закон Ампера

Согласно закону, экспериментально установленному Ампером, на элемент $d\vec{l}$ проводника с током действует в магнитном поле сила (рис. 20.21)

$$d\vec{F} = I \left[d\vec{l}, \vec{B} \right], \quad (20.30)$$

где I — сила тока в проводнике; \vec{B} — магнитная индукция в том месте, где находится элемент $d\vec{l}$. Модуль силы (20.30) вычисляется по формуле

$$dF = IB dl \sin \alpha, \quad (20.31)$$

где α — угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} . Сила направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и \vec{B} .

Соотношение (20.30) представляет математическую запись **закона Ампера**: сила, действующая на элемент проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на векторное произведение элемента длины проводника на магнитную индукцию поля. Сила, определяемая по (20.30), называется **силой Ампера**. Направление силы Ампера можно определить по «правилу левой руки».

Найдем силу взаимодействия двух тонких параллельных бесконечно длинных проводников с токами (рис. 20.22).

Если расстояние между проводниками a , то каждый элемент проводника с током I_2 будет находиться в поле, магнитная индукция

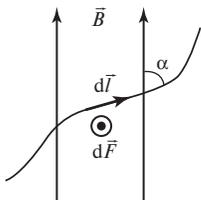


Рис. 20.21

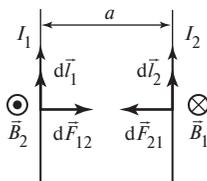


Рис. 20.22

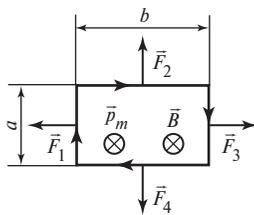


Рис. 20.23

которого $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$. Следовательно, на элемент проводника длиной dl будет действовать сила

$$dF_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl. \quad (20.32)$$

Для силы dF_{12} , действующей на участок проводника с током I_1 , получается аналогичное выражение. С помощью правила левой руки легко установить, что при одинаковом направлении токов проводники притягиваются друг к другу, а при различном — отталкиваются.

Из (20.32) следует определение основной единицы измерения электрических величин в СИ — ампера. **Один ампер** — сила неизменяющегося тока, который, протекая по двум параллельным бесконечно длинным проводникам ничтожно малого кругового сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м от другого, вызывает между ними силу взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины проводников.

Рассмотрим теперь поведение контура (рамки с током) в магнитном поле. Пусть прямоугольная рамка с током находится в однородном магнитном поле, причем направления магнитного момента рамки и магнитной индукции поля совпадают (рис. 20.23). Со стороны магнитного поля на каждую сторону рамки будет действовать соответствующая сила. Направления всех сил указаны на рисунке. Действие сил приводит к растяжению рамки. Если изменить направление тока (или направление вектора \vec{B}), то действие сил будет приводить к сжатию рамки. Однако в любом случае

$$F_1 = F_3 = Iba; \quad F_2 = F_4 = Ibb.$$

Так как $\sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 0$, то рамка в однородном магнитном поле

сохраняет состояние покоя. Таким образом, действие магнитного поля на рамку сводится в данном случае только к ее деформации.

Повернем плоскость рамки на угол α относительно положения, указанного на рис. 20.23. На такой же угол повернется вектор \vec{p}_m относительно вектора магнитной индукции \vec{B} . На рис. 20.24 представлен вид сверху на рамку (рамка расположена перпендикулярно плоскости чертежа).

Теперь векторы сил \vec{F}_1 и \vec{F}_3 изменили свои направления (мы предлагаем вам самостоятельно убедиться в том, что направления \vec{F}_2 и \vec{F}_4 остались прежними, т.е. эти силы растягивают рамку).

Моменты сил \vec{F}_1 и \vec{F}_3 будут стремиться повернуть рамку вокруг оси Z , перпендикулярной плоскости чертежа, против часовой стрелки. Определим эти моменты:

$$M_{1z} = IBa \frac{b}{2} \sin \alpha; \quad M_{3z} = IBa \frac{b}{2} \sin \alpha.$$

Направления векторов моментов указаны на рис. 20.24. Ясно, что суммарный момент сил, действующих на рамку,

$$M = M_1 + M_2 = IBab \sin \alpha.$$

Поскольку $ab = S$ (площадь рамки), то получаем:

$$M = p_m B \sin(\widehat{\vec{p}_m, \vec{B}}); \quad \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (20.33)$$

Таким образом, если направления магнитного момента рамки с током \vec{p}_m и магнитной индукции поля \vec{B} не совпадают, то дей-

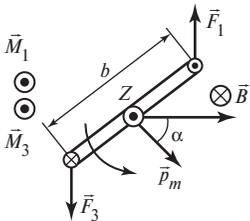


Рис. 20.24

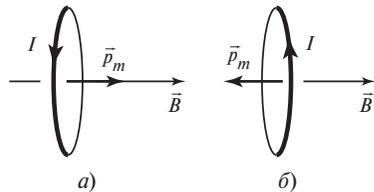


Рис. 20.25

ствие поля на рамку приведет к ее повороту вокруг оси, перпендикулярной вектору магнитной индукции, в положение устойчивого равновесия (рис. 20.25, а). При выведении рамки из этого положения действие момента сил возвращает рамку обратно (рис. 20.26, а) в положение, указанное штриховой линией. Положение рамки на рис. 20.25, б — это положение неустойчивого равновесия. При выведении рамки из этого положения действие момента сил еще более отклоняет рамку от этого положения и приводит ее в положение устойчивого равновесия (рис. 20.26, б).

Для того чтобы угол α между векторами \vec{p}_m и \vec{B} увеличить на $d\alpha$, нужно совершить элементарную работу $\delta A = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha$.

Эта работа внешних сил равна приращению энергии рамки с током в магнитном поле: $dW = \delta A$. Отсюда $dW = p_m B \sin \alpha d\alpha$. Интегрируя, находим, что

$$W = -p_m B \cos \alpha + \text{const}.$$

Если положить $\text{const} = 0$, то формула приобретает вид

$$W = -p_m B \cos \alpha = -\vec{p}_m \vec{B}. \quad (20.34)$$

Рассмотрим поведение плоского контура с током в неоднородном поле. На различные элементы контура будут действовать элементарные силы $d\vec{F}$ в различных направлениях (рис. 20.27). Результирующая всех элементарных сил $d\vec{F}$ ориентирует контур так, что направление его магнитного момента совпадает с направлением магнитной индукции. При этом контур поворачивается, растягивается и втягивается в область более сильного поля.

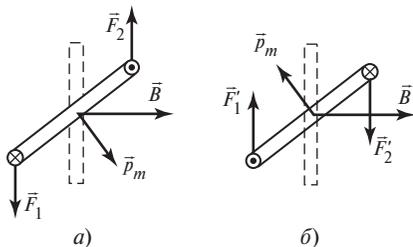


Рис. 20.26

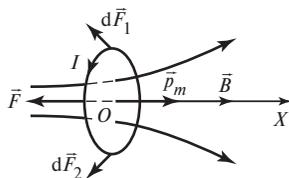


Рис. 20.27

Результирующая сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле, может быть найдена через градиент энергии контура в поле:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W.$$

Например, если неоднородность магнитного поля проявляется вдоль какой-либо оси OX , то

$$F_x = p_{m_x} \frac{\partial B}{\partial x},$$

где первый сомножитель — это проекция магнитного момента на ось OX .

Таким образом, если магнитный момент рамки и индукция поля сонаправлены, то рамка втягивается в область более сильного поля — туда, где $|\vec{B}|$ больше (где густота линий магнитной индукции больше), т.е. влево на рис. 20.27. Если направления магнитного момента рамки и индукции поля противоположны, то рамка выталкивается в область слабого поля.

Суммируя все сделанные выводы, резюмируем: *в наиболее общем случае поведение контура с током во внешнем магнитном поле описывается его поступательным движением, вращением и деформацией.*

20.5. Магнитный поток. Потокосцепление

Назовем *поток магнитной индукции (магнитным потоком)* через элемент поверхности dS величину

$$d\Phi = B dS \cos(\widehat{\vec{B}, \vec{n}}), \quad (20.35)$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к поверхности в месте расположения элемента dS (рис. 20.28).

Выражение (20.35) можно преобразовать, если ввести понятие *вектора площади элемента поверхности* как произведения площади

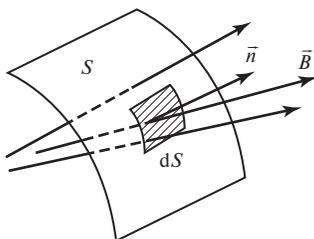


Рис. 20.28

поверхности и единичного вектора нормали к этой поверхности:

$$d\vec{S} = dS \vec{n}, \text{ причем } |d\vec{S}| = dS |\vec{n}| = dS.$$

Тогда *магнитный поток* можно определить как *скалярное произведение вектора площади элемента поверхности на магнитную индукцию*:

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S}.$$

Элемент поверхности dS выбирается таких малых размеров, чтобы его можно было считать практически плоским, а магнитное поле в его пределах можно было считать однородным.

Магнитный поток через всю поверхность S находится как алгебраическая сумма потоков через все малые участки этой поверхности:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (20.36)$$

Знак магнитного потока определяется относительно выбранного направления нормали \vec{n} к поверхности. Для выпуклой или замкнутой поверхности принято использовать внешние нормали \vec{n} , т.е. положительным считается направление из области, ограниченной этой поверхностью. По своему физическому смыслу магнитный поток аналогичен потоку вектора напряженности электрического поля: *магнитный поток через поверхность пропорционален числу линий магнитной индукции, пересекающих эту поверхность*.

Когда рассматривается контур, состоящий из N одинаковых витков, вводится понятие «потокосцепления». **Потокосцепление** Ψ *есть сумма магнитных потоков, сцепленных со всеми витками*:

$$\Psi = N\Phi.$$

Единица измерения магнитного потока в СИ называется **вебер** (обозначение Вб, принят в честь немецкого физика В.Э. Вебера, предложившего вместе с К.Ф. Гауссом систему единиц для электрических величин): 1 Вб — это поток однородного магнитного поля с индукцией 1 Тл через поверхность площадью 1 м^2 , расположенную перпендикулярно линиям магнитной индукции; $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$.

Поскольку линии магнитной индукции всегда замкнуты, то при вычислении магнитного потока через любую замкнутую поверхность необходимо учитывать, что число линий магнитной индукции, пересекающих поверхность с одной стороны (входящих в нее), всегда равно числу линий индукции, пересекающих поверхность с

другой стороны (выходящих из нее). Поэтому суммарный магнитный поток через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (20.37)$$

Опыты показали, что, разрезая постоянный магнит на части, нельзя разделить его полюсы, т.е. нельзя получить магнит либо с одним северным, либо с одним южным полюсом. Физический смысл этого факта и выражения (20.37) заключается в том, что в природе нет магнитных зарядов, т.е. источников магнитного поля, на которых начинались бы или заканчивались линии магнитной индукции.

20.6. Работа сил магнитного поля по перемещению проводника и контура с током

Допустим, что провод с током может свободно перемещаться во внешнем магнитном поле под действием силы Ампера. Это можно осуществить с помощью скользящих контактов между концами провода и остальными участками замкнутой цепи (рис. 20.29). Внешнее поле будем предполагать однородным. Направление вектора \vec{B} перпендикулярно к плоскости чертежа.

При указанных на рисунке направлениях тока и вектора \vec{B} сила Ампера, действующая на провод с током, будет направлена вправо. Модуль силы $F = IBl$, где l — длина перемещающегося участка проводника. На пути dx сила Ампера совершает работу по его перемещению:

$$\delta A = F dx = IBl dx.$$

Произведение $l dx$ равно заштрихованной на рис. 20.29 площади dS , очерчиваемой проводником при его движении, а $Bl dx$ — потоку магнитной индукции $d\Phi$ через эту площадку. Поэтому можно записать

$$\delta A = I d\Phi. \quad (20.38)$$

Полученный результат легко обобщить на случай неоднородного поля. Для этого нужно разбить проводник на участки dl и сложить элементарные работы, совершаемые по перемещению каждого участка (в пределах каждой площадки dS магнитную индукцию можно считать постоянной).

Если вектор \vec{B} образует с нормалью к поверхности, очерчиваемой проводником, угол α , отличный от нуля, то направление силы составит с направлением перемещения также угол α . Тогда

$$\delta A = F \cos \alpha dx = IB_n dl dx,$$

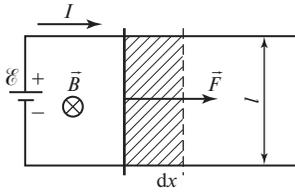


Рис. 20.29

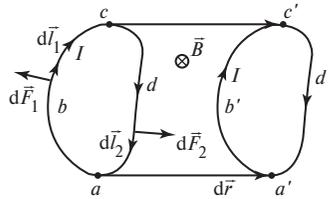


Рис. 20.30

где $B_n = B \cos \alpha$ — составляющая вектора магнитной индукции, совпадающая с направлением нормали к площадке dS . Магнитный поток через площадку, очерчиваемую проводником при его движении, составит $d\Phi = B_n dl dx$. Таким образом, и в этом случае вновь приходим к формуле (20.38).

Работа сил магнитного поля по перемещению проводника с током равна произведению силы тока в проводнике на магнитный поток через поверхность, очерчиваемую проводником при его движении.

Заметим, что работа по перемещению проводника с током совершается не за счет энергии магнитного поля (сила Лоренца работы не совершает), а за счет энергии источника, поддерживающего ток в электрической цепи, в которую входит рассматриваемый проводник.

Найдем работу, совершаемую над замкнутым контуром при его перемещении в магнитном поле. Пусть контур произвольной формы перемещается из положения $abcd$ в положение $a'b'c'd'a'$, совершая плоское движение (рис. 20.30; вектор \vec{B} направлен «от нас», перпендикулярно плоскости чертежа). Разделим контур $abcd$ на две части abc и cda . Найдем работы по перемещению каждой части.

Работу сил Ампера по перемещению части abc согласно (20.38) выразим так: $A_{abc} = -I(\Phi_1 + \Phi_0)$, где Φ_1 — магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром в его начальном положении; Φ_0 — магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром $adc'b'a'$. Знак «-» в этой формуле вызван тем, что векторы перемещения $d\vec{r}$ и силы Ампера $d\vec{F}_1$ образуют один с другим тупые углы для всех элементов $d\vec{l}_1$ проводника abc .

Работа сил Ампера по перемещению части cda : $A_{cda} = I(\Phi_2 + \Phi_0)$, где Φ_2 — магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром в его конечном положении.

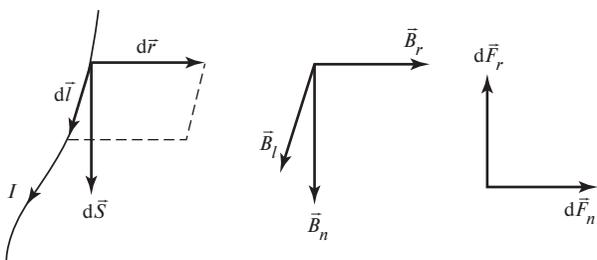


Рис. 20.31

Работа по перемещению всего замкнутого контура:

$$A = A_{abc} + A_{cda} = I(-\Phi_1 - \Phi_0 + \Phi_2 + \Phi_0) = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi.$$

Работа сил магнитного поля при конечном перемещении контура с током равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока через площадь, ограниченную контуром:

$$A = I\Delta\Phi. \quad (20.39)$$

Если при вычислении работы сил магнитного поля рассмотреть самый общий случай произвольной ориентации элемента проводника с током и вектора магнитной индукции поля, то выражения (20.38) и (20.39) не изменятся. Действительно, произвольно направленный вектор \vec{B} всегда можно разложить по трем взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 20.31) так, что $\vec{B}_r \parallel d\vec{r}$, $\vec{B}_l \parallel d\vec{l}$, $\vec{B}_n \parallel d\vec{S}$, где $d\vec{r}$ — перемещение проводника; $d\vec{l}$ — элемент проводника; $d\vec{S}$ — вектор площади поверхности, очерчиваемой проводником. Эти три составляющие магнитной индукции определяют выражения для трех составляющих силы Ампера $d\vec{F}_r$, $d\vec{F}_l$, $d\vec{F}_n$. Однако согласно (20.30)

$$d\vec{F}_r = I[d\vec{l}, \vec{B}_r],$$

причем $d\vec{F}_r \perp d\vec{r}$, а поэтому работа данной составляющей силы Ампера по перемещению проводника будет равна нулю. Кроме того, $d\vec{F}_l = I[d\vec{l}, \vec{B}_l] = 0$. Поэтому работу по перемещению проводника будет совершать только сила $d\vec{F}_n$, а именно этот случай и рассматривался раньше.

Глава 21

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Если электрический ток создает магнитное поле, то не может ли магнитное поле индуцировать электрический ток? Такой вопрос поставил в начале 1820-х годов М. Фарадей. Он считал, что между электрическими и магнитными явлениями существует тесная взаимосвязь. Ампер, Био и другие выяснили лишь одну сторону этой взаимосвязи, а именно магнитное действие тока. Фарадей считал необходимым установить существование электрического действия магнитного поля. «Представляется весьма необычным, чтобы, с одной стороны, всякий электрический ток сопровождался магнитным действием соответствующей интенсивности, направленным под прямым углом к току, и чтобы, в то же время, в хороших проводниках электричества, помещенных в сферу этого действия, совсем не индуцировался ток, не возникало какое-либо осязаемое действие, эквивалентное по силе току», — так писал Фарадей в своей работе «Экспериментальные исследования по электричеству».

Однако первые опыты с проводником, помещенным в магнитное поле постоянного тока, не дали положительных результатов. Только в 1831 г. после десяти лет упорных поисков Фарадею удалось решить поставленную задачу и осуществить опыты, имевшие огромное значение для дальнейшего развития техники. Открытое Фарадеем явление стало той основой, на базе которой в последующие годы были созданы электрические двигатели, генераторы и трансформаторы. Поэтому М. Фарадей заслуженно считается одним из основателей электротехники.

21.1. Явление электромагнитной индукции

Схему опытов Фарадея, которые привели к открытию электромагнитной индукции, можно пояснить следующим образом. Разместим на одном сердечнике две проводящие катушки (рис. 21.1, *a*). Одну из катушек замкнем на гальванометр, а другую будем подключать к источнику тока при помощи ключа *K*. В момент замыкания (или размыкания) цепи ключом *K* гальванометр, включенный в цепь, будет отмечать возникновение электрического тока в цепи второй катушки.

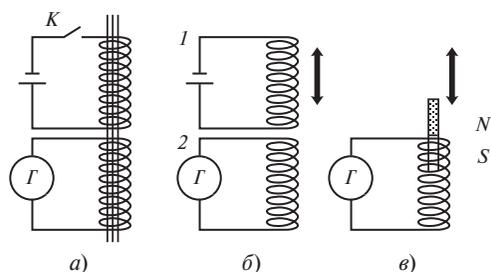


Рис. 21.1

По результатам этого опыта можно сделать вывод, что первая катушка электрически влияет на вторую. Однако, что было причиной появления тока во второй катушке: возникновение (или исчезновение) тока в первой катушке или магнитного поля этого тока?

Для ответа на этот вопрос поставим второй опыт (рис. 21.1, б). Теперь катушка 1 постоянно подключена к источнику, поэтому ток в ней неизменен. Однако в процессе смещения катушек одной относительно другой гальванометр дает показания, т.е. причиной появления тока в катушке 2 является изменение магнитного поля, в котором она находилась.

Чтобы подтвердить этот вывод, Фарадей проводит третий опыт (рис. 21.1, в), в котором первая катушка заменяется постоянным магнитом. Результаты опыта при смещении магнита относительно катушки 2 полностью аналогичны предыдущим. В этом опыте видно, что причиной всех электрических явлений в катушке 2 является исключительно поведение магнитного поля, в которое она помещена, а источник создания магнитного поля никак не влияет на результат наблюдений.

Общим для всех трех опытов было то, что при осуществлении действий, описанных выше, изменялся магнитный поток через вторую катушку, в которой создавался (индуцировался) электрический ток. Важно также и то, что появление тока наблюдалось только в процессе изменения магнитного потока. Как только изменение магнитного потока прекращалось (прекращалось относительное смещение катушек или останавливалось движение магнита), стрелка гальванометра занимала нулевое положение. Если гальванометр заменить вольтметром, то он покажет появление разности потенциалов на концах катушки 2.

Наблюдаемое явление Фарадей назвал *электромагнитной индукцией*, т.е. *явлением возникновения ЭДС индукции (а также индукционного тока в замкнутом контуре) при любом изменении магнитного потока через площадь, ограниченную контуром.*

Экспериментально доказано, что значение возбуждаемой ЭДС определяется только скоростью изменения магнитного потока через контур и не зависит от способа изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt. \quad (21.1)$$

Это выражение носит название основного **закона электромагнитной индукции (закона Фарадея)**, который формулируется так: *электродвижущая сила электромагнитной индукции равна скорости изменения магнитного потока, взятой с обратным знаком.*

Знак «−» с в (21.1) отражает экспериментально установленное правило Э. Ленца: *при всяком изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в контуре возникает индукционный ток такого направления, что магнитное поле тока противодействует изменению магнитного потока через эту поверхность.*

Например, при увеличении силы тока I в контуре 1 (рис. 21.2) будет увеличиваться магнитная индукция поля этого тока и соответственно магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром 2. Это приводит к появлению в контуре 2 ЭДС электромагнитной индукции и индукционного тока I_i . Направление индукционного тока при этом таково, что магнитная индукция \vec{B}_i , создаваемого им магнитного поля направлена противоположно индукции магнитного поля тока I в контуре 1, т.е. индукционный ток I_i , возникающий в контуре 2, препятствует увеличению магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром. Если же сила тока I в контуре 1 будет уменьшаться, то в контуре 2 возникнет индукционный ток I_i такого направления, что создаваемое им магнитное поле будет препятствовать уменьшению магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром 2.

Итак, правило Ленца показывает, что следствие процесса (появляющийся индукционный ток) всегда препятствует причине, его вызывающей (изменению магнитного потока).

Поясним это еще на одном примере. Поместим в однородное магнитное поле с магнитной индукцией \vec{B} систему двух параллельных проводников, замкнутых на резистор сопротивлением R (рис. 21.3).

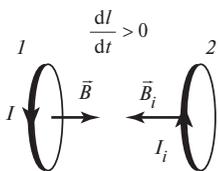


Рис. 21.2

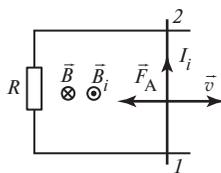


Рис. 21.3

Вдоль проводников без нарушения электрического контакта перемещается перемычка 1—2. Тогда при ее движении вправо со скоростью \vec{v} будет увеличиваться площадь проводящего контура, образованного проводниками, резистором и перемычкой.

Соответственно будет увеличиваться и магнитный поток через этот контур, что приведет к появлению индукционного тока. Индукционный ток в контуре будет иметь такое направление (против часовой стрелки), что магнитная индукция \vec{B}_i поля тока будет направлена противоположно индукции внешнего магнитного поля \vec{B} . В магнитном поле с индукцией \vec{B} на перемычку с индукционным током будет действовать сила Ампера, направление которой определяется по правилу левой руки (рис. 21.3). Появившаяся сила препятствует перемещению перемычки.

21.2. Электродвижущая сила индукции

Выведем закон электромагнитной индукции, используя закон сохранения энергии. Для этого рассмотрим проводящий контур (рис. 21.4), образованный двумя параллельными проводниками, замкнутыми свободно движущейся по ним перемычкой 1—2. В контур включен источник тока с ЭДС \mathcal{E} и резистор с сопротивлением R . Поместим контур в однородное магнитное поле с магнитной индукцией \vec{B} .

Поскольку в контуре существует электрический ток, на перемычку будет действовать сила Ампера, что вызовет движение перемычки вправо. При движении перемычки площадь контура будет возрастать, а, следовательно, магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, также будет увеличиваться. Это будет причиной возникновения электромагнитной индукции.

Согласно закону сохранения энергии работа, совершенная источником тока за время dt , расходуется на выделение в контуре некоторого количества теплоты и на работу по перемещению перемычки в магнитном поле:

$$\delta A_{\text{ист}} = \delta Q + \delta A.$$

Отсюда следует

$$\mathcal{E} dq = I^2 R dt + I d\Phi,$$

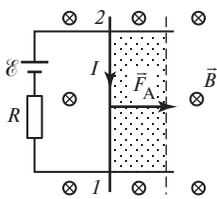


Рис. 21.4

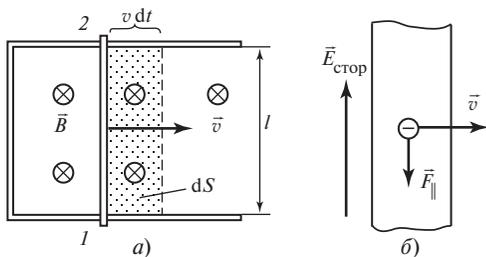


Рис. 21.5

где dq — заряд, перенесенный источником за время dt . Поскольку $dq = I dt$, то

$$\mathcal{E} = IR + \frac{d\Phi}{dt}, \quad I = \frac{\mathcal{E} - d\Phi/dt}{R}.$$

Согласно закону Ома числитель последнего выражения должен содержать сумму ЭДС в контуре, следовательно, второе слагаемое числителя представляет собой ЭДС индукции, возникающую в контуре:

$$\mathcal{E}_i = - d\Phi/dt.$$

Таким образом, получено выражение закона Фарадея для ЭДС индукции.

Это же выражение можно получить на основе электронных представлений, рассмотрев силы, действующие на электроны проводника, движущегося в магнитном поле. Для этого возьмем контур, участок которого $1-2$ длиной l может перемещаться без нарушения контакта с остальной частью контура (рис. 21.5, а).

Поместим его в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости контура. Приведем подвижную часть контура в движение со скоростью \vec{v} . С той же скоростью станут перемещаться относительно поля и носители заряда в проводнике — электроны. Рассмотрим процессы, происходящие внутри подвижной части контура, движущейся со скоростью \vec{v} в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} так, как это показано на рис. 21.5, б.

Поскольку свободные электроны движутся вместе с участком контура, со стороны магнитного поля на них действует магнитная составляющая силы Лоренца, направленная вдоль провода и равная по модулю

$$F_{||} = evB,$$

где индекс « $||$ » указывает на то, что сила направлена вдоль провода.

Под действием этой силы электроны смещаются в направлении нижнего (рис. 21.5, б) конца проводника. Действие этой силы эквивалентно действию электрической силы

$$eE_{\text{стор}} = evB,$$

обусловленной напряженностью поля $E_{\text{стор}} = vB$, направленной так, как указано на рис. 21.5, б. Это поле не электростатического происхождения, оно является полем сторонних сил. Роль сторонней силы в данном случае играет составляющая силы Лоренца, направленная вдоль проводника. Циркуляция вектора напряженности стороннего поля вдоль контура, включающего в себя движущийся проводник, равна ЭДС, индуцируемой в проводнике:

$$\mathcal{E} = \oint E_{\text{стор}} dl = \int_1^2 E_{\text{стор}} dl = E_{\text{стор}} l = vBl. \quad (21.2)$$

Правую часть этого выражения можно преобразовать:

$$v l B = B \frac{lv dt}{dt} = B \frac{dS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt},$$

где $d\Phi$ — магнитный поток через поверхность площадью dS , прочерчиваемую проводником при его движении за время dt (рис. 21.5, а).

С учетом этих преобразований формулу (21.2) можно переписать:

$$|E_i| = d\Phi/dt.$$

Если проводник движется в неоднородном магнитном поле, то следует выделить его малый элемент длиной dl и определить ЭДС индукции, возникающей в этом элементе,

$$d\mathcal{E} = vB dl, \quad (21.3)$$

а затем проинтегрировать это выражение по всей длине проводника.

Итак, результаты, полученные при выводе выражения для ЭДС электромагнитной индукции из закона сохранения энергии и на основе электронных представлений тождественны. Однако смысл правой части выражения для контура и отрезка проводника различен. В первом случае $d\Phi/dt$ — это скорость изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром. Во втором — это отношение магнитного потока $d\Phi$ через поверхность, прочерчиваемую проводником при его движении за бесконечно малый интервал времени, к значению этого интервала dt .

21.3. Индукционный ток. Индукционный заряд. Вихревое электрическое поле

Рассмотрим явление электромагнитной индукции, возникающее в короткозамкнутой катушке. Пусть катушка содержит N витков общим сопротивлением R и ее пронизывает изменяющийся во времени магнитный поток. В катушке возникает ЭДС индукции \mathcal{E}_i . Поскольку витки катушки соединены последовательно, \mathcal{E}_i будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом отдельном витке

$$\mathcal{E}_i = - \sum \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (\sum \Phi).$$

Сумма магнитных потоков, сцепленных со всеми проводниками элемента электрической цепи, называется потокосцеплением Ψ или полным магнитным потоком. Если поток, пронизывающий каждый из витков одинаков, то потокосцепление равно произведению числа витков на магнитный поток, сцепленный с одним витком:

$$\Psi = N\Phi.$$

Воспользовавшись потокосцеплением, выражение для ЭДС, индуцируемой в катушке, можно записать в виде

$$\mathcal{E}_i = - N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt}.$$

Силу индукционного тока, возникающего в катушке, найдем следующим образом:

$$I_i = \frac{E_i}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}.$$

За время существования в катушке индукционного тока (от момента времени t_1 до момента t_2) по катушке пройдет **индуцированный (индукционный) электрический заряд**

$$Q_i = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = - \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Psi}{dt} dt = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{R}, \quad (21.4)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — значения потокосцепления в начальный и конечный моменты времени. Важно отметить, что значение индукционного заряда определяется лишь начальным и конечным значениями потокосцепления.

С одной стороны, при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную неподвижным контуром, в контуре возникает ЭДС, определяемая скоростью изменения магнитного потока (21.1).

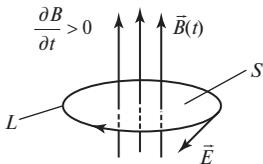


Рис. 21.6

С другой стороны, ЭДС равна удельной работе сторонних сил по переносу зарядов в контуре

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (21.5)$$

Объединив выражения (21.1) и (21.5), получим:

$$\oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = -d\Phi/dt. \quad (21.6)$$

Фигурирующий здесь магнитный поток может изменяться по ряду причин: благодаря изменению формы контура и его расположения в поле, а также из-за того, что магнитная индукция зависит от времени. Полная производная $d\Phi/dt$ учитывает все эти причины. В случае неподвижного контура магнитный поток изменяется только вследствие зависимости магнитной индукции от времени, поэтому вместо $d\Phi/dt$ следует брать частную производную $\partial\Phi/\partial t$. Точно также следует поступить, когда проводящий контур вообще отсутствует и мы рассматриваем вихревое электрическое поле, порождаемое изменяющимся во времени магнитным полем (рис. 21.6). Здесь L — воображаемый контур, по которому вычисляется циркуляция напряженности электрического поля.

Уравнение (21.6) с учетом того, что $d\Phi = \vec{B} d\vec{S}$, записывают в виде

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (21.7)$$

Стороннее электрическое поле не является кулоновским. Его принципиальные отличия от изученного нами ранее электростатического поля таковы:

это поле создается не электрическими зарядами, а изменяющимся во времени магнитным полем;

силовые линии поля являются замкнутыми, т.е. такое электрическое поле является **вихревым**.

Физический смысл уравнения (21.7) заключается в том, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает в пространстве вихревое электрическое поле.

21.4. Самоиндукция. Индуктивность

Рассмотрим контур с электрическим током силой I (рис. 21.7). Ток создает полный магнитный поток Ψ , пронизывающий поверхность, ограниченную контуром. Этот магнитный поток называется собственным магнитным потоком. При изменении силы тока в контуре

будет изменяться также и собственный магнитный поток. Это приводит к тому, что в контуре индуцируется ЭДС индукции. Явление возникновения ЭДС электромагнитной индукции в электрической цепи вследствие изменения в ней электрического тока называется *самоиндукцией*.

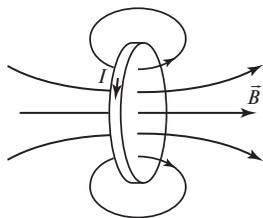


Рис. 21.7

В соответствии с законом Био—Савара—Лапласа магнитная индукция B пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Откуда вытекает, что сила тока в цепи пропорциональна создаваемому этим током потокоцеплению:

$$\Psi = LI. \quad (21.8)$$

Коэффициент пропорциональности L между силой тока в цепи и полным магнитным потоком называется *индуктивностью* цепи. Индуктивность L — скалярная величина, численно равна отношению потокоцепления электрической цепи к силе тока в цепи

$$L = \Psi / I. \quad (21.9)$$

Индуктивность элемента электрической цепи (например, провода, соленоида, коаксиального кабеля и т.п.) зависит только от его формы, геометрических размеров, числа витков и магнитных свойств среды, в которой этот элемент находится. При неизменности этих величин ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s согласно закону Фарадея определяется выражением

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt} = - L \frac{dI}{dt}. \quad (21.10)$$

Таким образом, величина ЭДС самоиндукции для любой системы пропорциональна скорости изменения силы тока в ней. В роли коэффициента пропорциональности выступает индуктивность системы. В СИ для измерения индуктивности принята единица, называемая *генри* (обозначение Гн) в честь американского физика Дж. Генри. Независимо от М. Фарадея, но позже него, он открыл закон электромагнитной индукции. В соответствии с (21.9) 1 Гн — это индуктивность такой проводящей системы, в которой при силе тока 1 А создается потокоцепление 1 Вб.

Определим для примера индуктивность длинного соленоида. Пусть его длина l , площадь поперечного сечения S и число витков в нем N . Зададим силу тока I в соленоиде. Магнитная индукция на оси соленоида в его среднем сечении определяется формулой

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l}.$$

Следует отметить, что магнитная индукция в соленоиде убывает как в радиальном направлении (от оси к периферии), так и в осевом (от среднего сечения к торцам соленоида). Сделаем следующие предположения. Во-первых, будем считать магнитную индукцию постоянной по поперечному сечению соленоида. Во-вторых, пренебрежем уменьшением магнитной индукции вблизи торцов соленоида (для длинного соленоида число витков, находящихся вблизи торцов в области, где магнитная индукция по модулю уменьшается, много меньше числа витков, находящихся в области с постоянной магнитной индукцией). Тогда потокосцепление равно произведению магнитной индукции в среднем сечении на площадь поперечного сечения и число витков соленоида:

$$\Psi = \mu_0 I \frac{N}{l} NS.$$

Для определения индуктивности разделим потокосцепление Ψ на силу тока в соленоиде I

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S. \quad (21.11)$$

Анализ формулы (21.11) показывает, что индуктивность элемента электрической цепи не зависит от силы тока в нем.

21.5. Токи при размыкании и замыкании цепей, содержащих индуктивность

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие в проводниках, обладающих индуктивностью, вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы воспрепятствовать изменениям силы тока, текущего в проводниках. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании и размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.

Найдем законы изменения силы тока при замыкании или размыкании электрической цепи.

Допустим, что источник с ЭДС \mathcal{E} замыкается ключом K на цепь, содержащую резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L (рис. 21.8).

Поскольку сила тока в цепи будет возрастать, в катушке возникнет явление самоиндукции, и в процессе изменения тока в цепи будут существовать две ЭДС — источника \mathcal{E} и самоиндукции \mathcal{E}_s . Запишем

закон Ома для замкнутой цепи: $I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_s}{R}$, здесь I — мгновенное

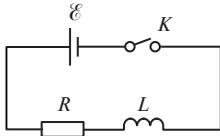


Рис. 21.8

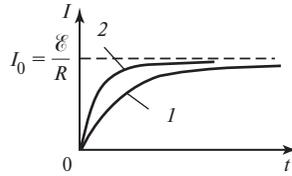


Рис. 21.9

значение силы тока. Поскольку $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$, то $L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - IR$. Решим полученное дифференциальное уравнение, разделив переменные: $\frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \frac{1}{L} dt$. Умножим левую и правую часть последнего уравнения

на сопротивление цепи R и преобразуем к виду $\frac{d(\mathcal{E} - IR)}{\mathcal{E} - IR} = -\frac{R}{L} dt$.

Проинтегрировав последнее выражение, получим:

$$\ln(\mathcal{E} - IR) = -\frac{R}{L}t + \ln C,$$

где C — постоянная интегрирования, которая может быть найдена из начальных условий. Потенцирование и преобразование этого выражения дает

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{C}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (21.12)$$

При замыкании цепи в начальный момент времени при $t = 0$ сила тока равна нулю $I(0) = 0$ и формула (21.12) преобразуется к виду

$$0 = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{C}{R} e^0 = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{C}{R}.$$

Отсюда $C = \mathcal{E}$. Тогда уравнение (21.12) принимает вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

При $t \rightarrow \infty$ сила тока в цепи $I_0 = \mathcal{E}/R$, и в результате

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (21.13)$$

Функция (21.13) описывает нарастание силы тока в цепи после подключения к ней источника ЭДС. График зависимости силы тока от времени для двух электрических цепей, содержащих катушки с различными значениями индуктивности ($L_1 > L_2$), приведен на рис. 21.9.

Сила тока в цепи нарастает по экспоненциальному закону. Скорость нарастания определяется имеющей размерность времени величиной

$$\tau = L/R, \quad (21.14)$$

которую называют постоянной времени цепи. С учетом формулы (21.14) формуле (21.13) можно придать вид

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (21.15)$$

Теперь рассмотрим случай размыкания цепи (рис. 21.10). Перебросим ключ K из положения 1 в положение 2, тем самым отключим источник и замкнем цепь, включающую резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L . В момент замыкания цепи в катушке существовал ток силой I_0 .

Начальные условия для решения уравнения в этом случае будут выглядеть следующим образом: $t = 0$; $I(0) = I_0$; $\mathcal{E}(0) = 0$. Подставим эти значения в (21.12): $I_0 = -\frac{C}{R} e^0 = -\frac{C}{R}$. Отсюда получим, что $C = -I_0 R$ и соотношение (21.12) преобразуем к виду

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (21.16)$$

Сила тока в цепи при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю по экспоненциальному закону. На рис. 21.11. приведены графики зависимости силы тока от времени при двух различных значениях индуктивности. Из уравнения (21.16) следует, что за время $\tau = L/R$ сила тока убывает в e раз. С использованием постоянной времени τ закон изменения силы тока можно записать следующим образом:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

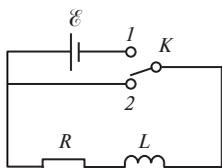


Рис. 21.10

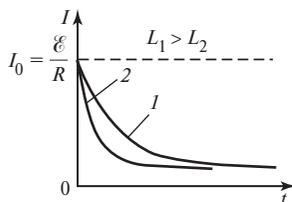


Рис. 21.11

Анализ приведенной формулы и хода кривых 1 и 2, приведенных на рис. 21.9 и 21.11, показывает, что чем больше значение постоянной времени τ (т. е. чем больше значение индуктивности L при неизменном значении сопротивления R), тем медленнее происходит процесс установления силы тока при коммутации цепей, содержащих индуктивные катушки.

21.6. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии

Рассмотрим явления, возникающие при размыкании цепи. Поскольку после отключения источника (см. рис. 21.10) ток в цепи не прекращается, то это означает, что работа по переносу зарядов в цепи совершается за счет ЭДС самоиндукции. При переносе по цепи заряда dq эта работа находится следующим образом:

$$\delta A = \mathcal{E}_s dq = -L \frac{dI}{dt} I dt = -LI dI. \quad (21.17)$$

Так как сила тока в цепи уменьшается, то ослабевают создаваемое током магнитное поле. Согласно закону сохранения энергии это означает, что работа по переносу зарядов осуществляется за счет уменьшения энергии магнитного поля: $\delta A = -dW$. Последнее уравнение после интегрирования принимает вид

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1).$$

Эта работа идет на приращение внутренней энергии проводников, т. е. на их нагревание. По окончании процесса сила тока в цепи и, следовательно, энергия магнитного поля становятся равными нулю ($W_2 = 0$).

Так как работа ЭДС самоиндукции, с одной стороны,

$$A = - \int_I^0 LI dI = LI^2/2, \quad (21.18)$$

а с другой —

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1,$$

то энергия магнитного поля W , запасенная в катушке индуктивностью L с током I

$$W = W_1 = \int_I^0 -LI dI = LI^2/2. \quad (21.19)$$

Заметим, что выражение (21.18) можно трактовать как работу, которую нужно совершить против ЭДС самоиндукции в процессе

нарастания силы тока от 0 до I и которая идет на создание магнитного поля, обладающего энергией (21.19). Работа, совершаемая против ЭДС самоиндукции, определяется по формуле

$$A' = \int_0^I (-\mathcal{E}_s) I dt.$$

Произведя преобразования, аналогичные тем, которые приведены в (21.17), получим: $dA' = LI dI$,

$$A' = \int_0^I LI dI = LI^2/2. \quad (21.20)$$

Последнее выражение совпадает с (21.18). Работа (21.20) совершается при установлении тока за счет источника ЭДС и целиком идет на создание сцепленного с контуром магнитного поля.

Таким образом, как бы мы ни анализировали процесс, результат его рассмотрения один и тот же: если в системе, обладающей индуктивностью L , существует ток силой I , то в системе существует магнитное поле с энергией

$$W = LI^2/2. \quad (21.21)$$

Выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие само поле. Рассмотрим длинный соленоид, индуктивность которого выражается формулой

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Если в соленоиде течет постоянный ток силой I , то внутри соленоида возникнет магнитное поле, энергию которого можно определить по формуле (21.21):

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} SI^2.$$

Умножим и разделим правую часть этого выражения на $\mu_0 l$ и учтем, что $V = Sl$ — объем соленоида:

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} SI^2 \frac{\mu_0 l}{\mu_0 l} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{l^2} \frac{Sl}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} V,$$

где B — магнитная индукция внутри соленоида.

Введем понятие объемной плотности энергии магнитного поля так же, как это понятие вводили для электрического поля [см. формулу (17.16)]. **Объемной плотностью энергии магнитного поля** называется отношение энергии поля, заключенного в малом объеме

пространства, к этому объему. В вакууме объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (21.22)$$

Энергию однородного магнитного поля можно рассчитать так: $W = wV$.

Для неоднородного магнитного поля его энергия в некотором объеме V вычисляется интегрированием объемной плотности энергии по этому объему:

$$W = \oint_V w \, dV, \quad (21.23)$$

где dV — элементарный объем части пространства, настолько малый, что в его пределах магнитную индукцию можно считать постоянной.

21.7. Взаимная индукция

Рассмотрим два контура 1 и 2 , расположенные один относительно другого не очень далеко (рис. 21.12). Если в контуре 1 течет ток силой I_1 , он создает через контур 2 полный магнитный поток $\Psi_{21} \sim I_1$. Коэффициент пропорциональности между Ψ_{21} и I_1 зависит от взаимного расположения контуров, расстояния между ними и их геометрии. Можно записать:

$$\Psi_{21} = L_{21}I_1, \quad (21.24)$$

где L_{21} — *взаимная индуктивность* второго и первого контура. Так же как и индуктивность, взаимная индуктивность в СИ измеряется в *генри*.

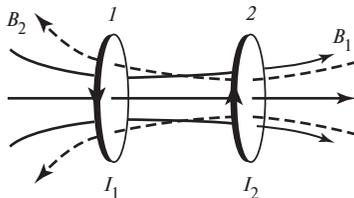


Рис. 21.12

При изменении в первом контуре силы тока I_1 во втором контуре будет возникать электромагнитная индукция, ЭДС которой определяется следующим образом:

$$\mathcal{E}_{21} = - \frac{d\Psi_{21}}{dt} = - L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (21.25)$$

Аналогично при изменении силы тока во втором контуре возникает ЭДС электромагнитной индукции в первом контуре:

$$\mathcal{E}_{12} = - \frac{d\Psi_{12}}{dt} = - L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Взаимные индуктивности контуров при отсутствии ферромагнетиков всегда равны: $L_{12} = L_{21}$.

Явление взаимной индукции лежит в основе работы трансформаторов, служащих для повышения или понижения напряжения переменного тока.

Глава 22

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. МАГНЕТИКИ

Из сопоставления картин линий магнитной индукции соленоида и полосового магнита видно, что эти картины очень похожи одна на другую. Полная аналогия между магнитными полями полосовых магнитов и длинных соленоидов позволила французскому физiku А. Амперу в 1822 г. высказать гипотезу о том, что магнитные свойства постоянных магнитов обусловлены существующими в них микротоками. О природе и характере этих микротоков Ампер ничего не мог сказать, так как в то время учение о строении вещества только зарождалось. Лишь после открытия электрона и выяснения строения атомов и молекул, т.е. спустя почти 100 лет, гипотеза Ампера была блестяще подтверждена и легла в основу современных представлений о магнитных свойствах вещества. Гипотетические микротоки Ампера получили простое и наглядное объяснение: они связаны с движением электронов в атомах, молекулах и ионах.

При помещении любого вещества в магнитное поле оно создает собственное магнитное поле, т.е. вещество *намагничивается*. Существуют различные виды намагниченности, но везде и всегда она создается магнитными моментами микрочастиц вещества, в частности электронным орбитальным магнитным моментом и электронным спиновым магнитным моментом.

22.1. Магнитное поле в веществе. Типы магнетиков

Ранее рассматривалось магнитное поле, создаваемое проводниками с током, находящимися в вакууме. Если же проводники с током находятся в какой-либо среде, магнитное поле существенно образом меняется. Всякое вещество является *магнетиком*, т. е. способно под действием магнитного поля намагничиваться (приобретать магнитный момент). Внешнее магнитное поле (поле проводников с токами) намагничивает вещество. В результате намагниченное вещество создает собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее. Индукция результирующего магнитного поля равна сумме индукций \vec{B}_0 и \vec{B}' собственного и внешнего магнитных полей :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

Для объяснения намагничивания тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи. Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. Ампер назвал такие токи *микротоками*, так как эти токи принимают участие в создании магнитного момента вещества, но не дают вклад в *макротоки* — токи проводимости.

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты микротоков ориентированы беспорядочно (рис. 22.1), поэтому суммарный магнитный момент микротоков $\vec{P}_m = \sum_i \vec{p}_{mi} = 0$. При нали-

чии внешнего поля магнитные моменты микротоков ориентируются вдоль линий индукции внешнего поля и суммарный магнитный момент становится отличным от нуля (рис. 22.2): $\vec{P}_m = \sum_i \vec{p}_{mi} \neq 0$.

Магнитные поля отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют одно другое, и возникает поле с индукцией \vec{B}' , вещество намагничивается.

Намагничивание магнетика характеризуется магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют *намагниченностью* и обозначают J . Если магнетик намагничен неоднородно, то намагниченность магнетика в данной точке определяется следующим выражением:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V} \frac{\sum \vec{P}_m}{\Delta V}, \quad (22.1)$$

где ΔV — физически бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки; \vec{p}_m — магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование производится по всем молекулам, заключенным в объеме ΔV . *Намагниченность численно равна магнитному моменту единицы объема вещества.*

Ранее была выведена связь циркуляции магнитной индукции с токами, сцепленными с контуром интегрирования (20.18). Следует

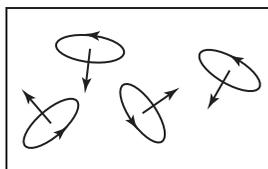


Рис. 22.1

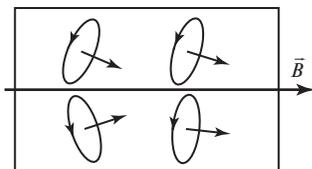


Рис. 22.2

учитывать, что в правую часть соотношения $\oint_L \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_{i \text{ сц}}$

входят токи любой природы, сцепленные с контуром, т. е. как макроток, так и микроток. В соответствии с гипотезой Ампера кроме макротоков (токов проводимости) необходимо учесть и наличие в веществе микротоков, значение которых не известно:

$$\oint_L \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n (I_{i \text{ макро}} + I_{i \text{ микро}}). \quad (22.2)$$

Попытаемся ввести такую вспомогательную величину, циркуляция которой определялась бы только макроскопическими токами — токами проводимости. Рассмотрим возможное расположение микротоков молекул вещества относительно некоторого контура L (рис. 22.3). Все микротоки можно разделить на три группы: токи I как бы «нанизаны» на контур L (как баранки на веревку); токи I' дважды пересекают поверхность, натянутую на контур; токи I'' вообще не пересекают эту поверхность. Очевидно, что сцепленными с контуром являются только токи I и I' . Однако, сколько бы ни нашлось токов I' , их алгебраическая сумма (входящая в правую часть закона полного тока) всегда будет равна нулю. Это объясняется тем, что каждый из этих микротоков пересекает поверхность, ограниченную контуром, дважды, причем в противоположных направлениях.

Для строгого применения закона полного тока необходимо знать число микротоков, сцепленных с контуром интегрирования L . Для их подсчета вырежем вокруг контура L косой цилиндр длиной dl с основаниями, параллельными плоскостям микротоков, и площадями, равными площади контуров микротоков (рис. 22.4).

Сцепленными с контуром окажутся микротоки, центры которых попадут в этот цилиндр. Пусть n — концентрация молекул, тогда сумма всех микротоков, попавших в цилиндр, определяется по формуле:

$$dI_{\text{микро}} = In \, dV = InS \, dl \cos \alpha = p_m n \, dl \cos \alpha. \quad (22.3)$$

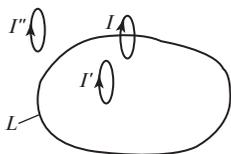


Рис. 22.3

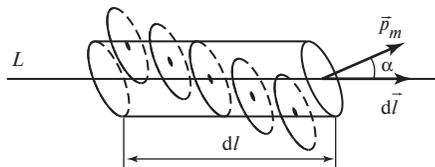


Рис. 22.4

Очевидно, что произведение $p_m n$ представляет собой модуль вектора намагниченности вещества. Преобразуем выражение (22.3):

$$dI_{\text{микро}} = p_m n dl \cos \alpha = \vec{J} \cdot d\vec{l}.$$

Полная сумма микротоков, сцепленных с контуром на всей его длине, $I_{\text{микро}} = \oint dI_{\text{микро}} = \oint \vec{J} \cdot d\vec{l}$.

Подставим последнее соотношение в формулу (22.2):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum_{i=1}^n I_{i \text{ макро}} + \oint_L \vec{J} \cdot d\vec{l} \right).$$

Отсюда

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_{i \text{ макро}}. \quad (22.4)$$

В скобках стоит векторная величина, циркуляция которой определяется только макротоками. Назовем ее **напряженностью магнитного поля** \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (22.5)$$

В СИ размерности намагниченности и напряженности магнитного поля одинаковы: $[H] = [J] = \text{А} \cdot \text{м}^{-1}$. Тогда формулу (22.4) перепишем в виде

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_{i \text{ макро}}. \quad (22.6)$$

Полученное соотношение выражает **теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля** (закон полного тока для магнитного поля в веществе): *циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме макротоков (токов проводимости), сцепленных с этим контуром.*

В однородном изотропном магнетике имеет место линейная связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H},$$

где χ_m — магнитная восприимчивость.

Магнитная восприимчивость — величина, характеризующая свойство вещества намагничиваться в магнитном поле, равная отношению модуля намагниченности к модулю напряженности магнитного поля: $\chi_m = J/H$.

Используя понятие магнитной восприимчивости, выражение (22.5) можно записать следующим образом:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi_m).$$

Если обозначить $\mu = 1 + \chi_m$, то

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (22.7)$$

Величина μ называется *относительной магнитной проницаемостью* вещества. Выясним ее физический смысл. Пусть в вакууме (при отсутствии магнетика) токи проводимости создают магнитное поле, характеризующееся индукцией $\vec{B}_{\text{вак}} = \mu_0 \vec{H}_{\text{вак}}$. В однородном изотропном магнетике те же токи проводимости создадут магнитное поле с индукцией $\vec{B}_{\text{магн}} = \mu \mu_0 \vec{H}_{\text{магн}}$.

В соответствии с теоремой (22.6),

$$\vec{H}_{\text{вак}} = \vec{H}_{\text{магн}},$$

поэтому

$$\mu = B_{\text{магн}} / B_{\text{вак}}. \quad (22.8)$$

Относительная магнитная проницаемость вещества показывает, во сколько раз индукция магнитного поля системы токов в магнетике отличается от индукции магнитного поля той же системы токов в вакууме. Магнитная восприимчивость может быть и положительной, и отрицательной. Следовательно, относительная магнитная проницаемость вещества может быть как больше, так и меньше единицы. По значению относительной магнитной проницаемости все магнетики делятся на три основные группы.

1. *Диамагнетики* — вещества, магнитная восприимчивость которых отрицательна, поэтому $\mu_d < 1$. Из опытных данных известно, что $|\chi_{m_d}| \approx 10^{-8} \dots 10^{-5}$, поэтому μ_d для практических расчетов можно принять равной единице.

2. *Парамагнетики* — вещества, магнитная восприимчивость которых незначительно больше нуля, поэтому $\mu_p > 1$. Из опытных данных известно, что $\chi_{m_p} \approx 10^{-8} \dots 10^{-4}$, поэтому для практических расчетов можно принять μ_p равной единице.

3. *Ферромагнетики* — вещества, магнитная восприимчивость которых значительно больше нуля, поэтому $\mu_f \gg 1$. Из опытных данных известно, что $\chi_{m_f} \approx 10^2 \dots 10^6$. Ферромагнетики используются для создания сильных магнитных полей.

22.2. Условия на границе магнитных сред

Выясним, что происходит с магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля на границе двух однородных изотропных магнетиков с разными значениями магнитной проницаемости μ . Воспользуемся тем обстоятельством, что поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Рассмотрим воображаемый цилиндр высотой Δh , основания которого площадью S_1 и S_2 ($S_1 = S_2 = S$) расположены по разные стороны границы раздела (рис. 22.5). Магнитным потоком через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь, так как Δh будет стремиться к нулю. Магнитный поток через верхнее основание $\Phi_{\text{в}} = -B_{1n}S_1$, где B_{1n} — нормальная составляющая вектора магнитной индукции в первом магнетике в непосредственной близости к поверхности раздела магнетиков. Аналогично поток через нижнее основание есть $\Phi_{\text{н}} = B_{2n}S_2$, где B_{2n} — нормальная составляющая вектора магнитной индукции во втором магнетике, тоже в непосредственной близости к поверхности раздела. Сложив эти два потока, получим полный поток магнитной индукции через замкнутую поверхность, который равен нулю:

$$\Phi = -B_{1n}S_1 + B_{2n}S_2 = 0.$$

Отсюда следует

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (22.9)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнитных сред нормальная к границе раздела составляющая магнитной индукции не изменяется.

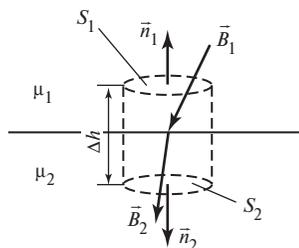


Рис. 22.5

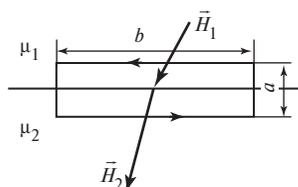


Рис. 22.6

Выражение (22.9) можно переписать в виде $\mu_1\mu_0 H_{1n} = \mu_2\mu_0 H_{2n}$, тогда для нормальных составляющих напряженности магнитного поля получим:

$$H_{2n} = H_{1n} \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (22.10)$$

Для нахождения условия связи тангенциальных проекций напряженности и индукции поля в двух средах выберем прямоугольный контур (рис. 22.6) и вычислим для него циркуляцию вектора напряженности магнитного поля. Если на поверхности раздела двух сред отсутствуют токи проводимости, то из закона полного тока следует, что циркуляция напряженности магнитного поля по выбранному замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L \vec{H} \, d\vec{l} = 0.$$

Отрезок контура a возьмем столь малым, что вкладом, вносимым в циркуляцию вдоль сторон, перпендикулярных к поверхности раздела, можно пренебречь. Тогда, с одной стороны, циркуляция вектора \vec{H} вдоль этого контура равна $b(H_{1\tau} - H_{2\tau})$. С другой стороны, поскольку с контуром не сцеплены макроскопические токи, циркуляция вектора \vec{H} равна нулю, откуда вытекает, что

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (22.11)$$

т.е. составляющая напряженности магнитного поля, касательная к поверхности раздела двух сред, не изменяется при переходе через эту поверхность.

Выражение (22.11) можно переписать в виде

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1\mu_0} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2\mu_0}; \quad B_{2\tau} = B_{1\tau} \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (22.12)$$

Объединяя условия (22.9)—(22.12), можно показать каким образом преломляются линии индукции магнитного поля при переходе из одной среды в другую. Для случая $\mu_2 > \mu_1$ это изображено на рис. 22.7 и 22.8. Видно, что при увеличении относительной магнитной проницаемости среды линии магнитной индукции отклоняются в сторону поверхности раздела сред.

Если первая среда не обладает ферромагнитными свойствами, а вторая является ферромагнетиком, то $\mu_2 \gg \mu_1$ и из соотношения (22.12) следует, что $B_{2\tau} \gg B_{1\tau}$, т.е. $B_2 \approx B_{2\tau}$. Это означает, что линии магнитной индукции не проходят вглубь второй среды, а идут парал-

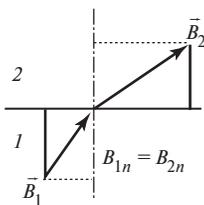


Рис. 22. 7

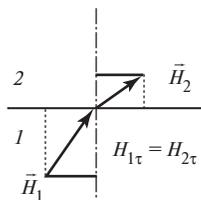


Рис. 22. 8

тельно ее границе. Если линии магнитной индукции перпендикулярны границе раздела сред, то модуль вектора магнитной индукции остается неизменным при переходе через границу, даже если вторая среда является сильным ферромагнетиком.

22.3. Магнитные моменты атомов и молекул

Гипотеза Ампера о молекулярных токах позволяет объяснить многие явления в магнетиках. Природа молекулярных токов стала понятной после того, как опытами Резерфорда было установлено, что атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов. Согласно теории, развитой в 1913 г. Нильсом Бором, электроны в атомах движутся по круговым орбитам.

Рассмотрим модель одноэлектронного атома (рис. 22.9). Такой атом может быть представлен в виде массивной положительно заряженной частицы (ядра), находящейся в центре круговой орбиты электрона, вращающегося вокруг него.

Отрицательно заряженный электрон, вращающийся по орбите, создает **орбитальный ток**. Направление орбитального тока противоположно направлению вращения электрона. Если v — скорость вращения электрона по орбите, то силу орбитального тока $I_{\text{орб}}$ можно найти, разделив значение заряда на период вращения:

$$I_{\text{орб}} = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (22.13)$$

Орбитальный ток электрона подобен току, существующему в проводящем витке, а поэтому движение электрона по орбите создает магнитный момент:

$$p_m = I_{\text{орб}} S = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (22.14)$$

Момент (22.14) обусловлен движением электрона по орбите, вследствие чего называ-

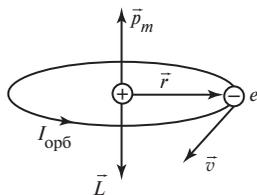


Рис. 22. 9

ется **орбитальным магнитным моментом электрона**. Направление вектора магнитного момента образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (рис. 22.9). Движущийся по орбите электрон массой m обладает моментом импульса

$$L = mvr. \quad (22.15)$$

Вектор \vec{L} называют **орбитальным механическим моментом электрона**. Он образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов \vec{p}_m и \vec{L} противоположны. Отношение магнитного момента p_m элементарной частицы к ее механическому моменту L называется **гиромангнитным отношением**. Для электрона

$$p_m/L = -e/(2m), \quad (22.16)$$

знак « \rightarrow » указывает на то, что направления моментов противоположны.

Кроме орбитальных моментов (22.14) и (22.15) электрон обладает собственным механическим L_s и магнитным p_{ms} моментами, для которых значение гиромангнитного отношения в 2 раза больше:

$$p_{ms}/L_s = -e/m. \quad (22.17)$$

Собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются такими же неотъемлемыми свойствами электрона, как его масса и заряд.

Магнитный момент атомов складывается из орбитальных и собственных моментов входящих в него электронов, а также из магнитного момента ядра. Магнитный момент ядра значительно меньше моментов электронов, поэтому при рассмотрении многих явлений им можно пренебречь и считать, что магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов электронов. Следует ожидать, что вещества, атомы которых имеют магнитный момент равный нулю и магнитный момент отличный от нуля, будут вести себя во внешнем магнитном поле различным образом.

22.4. Диамагнетизм

Как уже отмечалось, к **диамагнетикам** относятся вещества, магнитная восприимчивость которых отрицательна, а относительная магнитная проницаемость меньше единицы. К диамагнетикам относятся вещества, у которых атомы не обладают магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых моментов электронов равна нулю).

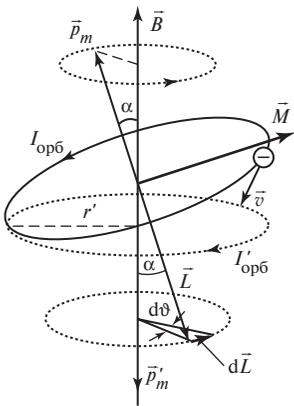


Рис. 22.10

Выясним, по какой причине диамагнетики намагничиваются «противоположно» внешнему магнитному полю, т.е. так, что их индуцированные магнитные моменты атомов \vec{p}'_m направлены противоположно вектору магнитной индукции внешнего поля. Рассмотрим орбитальное движение электронов таких атомов во внешнем поле (рис. 22.10).

Если линии магнитной индукции не перпендикулярны плоскости орбиты электрона, то на орбитальный ток $I_{\text{орб}}$, обусловленный движением электрона (по аналогии с витком с током), действует

$$\text{вращающий момент } \vec{M} = \left[\vec{p}'_m, \vec{B} \right].$$

Под действием магнитного поля ось орбиты и совпадающий с ней по направлению вектор магнитного момента \vec{p}'_m прочерчивают при вращении вокруг вектора магнитной индукции боковую поверхность конуса с вершиной в центре орбиты. Возникает так называемая **прецессия** орбиты электрона. Причем согласно основному уравнению динамики вращательного движения за время dt вектор механического момента электрона \vec{L} получает приращение $d\vec{L}$:

$$d\vec{L} = \vec{M} dt.$$

Вектор $d\vec{L}$, как и вектор \vec{M} , перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы \vec{B} и \vec{L} . Модуль вектора $d\vec{L}$

$$dL = p_m B \sin \alpha dt,$$

где α — угол между вектором магнитного момента и вектором магнитной индукции.

За время dt плоскость, в которой лежит вектор \vec{L} , повернется вокруг вектора \vec{B} на угол

$$d\vartheta = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{p_m B \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \frac{p_m}{L} B dt.$$

Разделив угол $d\vartheta$ на время dt , найдем угловую скорость прецессии

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_m}{L} B.$$

Подставив в это выражение значение отношения магнитного и механического моментов электрона (гиромагнитное отношение), получим:

$$\omega_L = \frac{e}{2m} B. \quad (22.18)$$

Частоту (22.18) называют *частотой ларморовой прецессии* или просто *ларморовой частотой*.

Прецессия орбиты обуславливает дополнительное движение электрона вокруг направления магнитной индукции внешнего поля. Это, в свою очередь, приводит к возникновению дополнительного орбитального тока $I'_{\text{орб}} = e \frac{\omega_L}{2\pi}$ и соответственно дополнительного магнитного момента

$$p'_m = I'_{\text{орб}} S' = e \frac{\omega_L}{2\pi} \pi r'^2 = \frac{e\omega_L}{2} r'^2.$$

Вектор \vec{p}'_m , как видно на рис. 22.10, направлен в сторону, противоположную направлению магнитной индукции внешнего поля. Этот момент называют индуцированным (наведенным) магнитным моментом. С учетом формулы для ларморовой частоты индуцированный магнитный момент

$$\vec{p}'_m = -\frac{e^2 \vec{B}}{4m} r'^2. \quad (22.19)$$

Знак « \leftarrow » означает, что векторы \vec{p}'_m и \vec{B} направлены в противоположные стороны.

Обобщим полученные результаты. При внесении любого вещества в магнитное поле каждый орбитальный ток независимо от направления движения электрона по орбите приобретает индуцированный магнитный момент \vec{p}'_m , направленный против вектора магнитной индукции внешнего поля. Этот процесс в физике магнитных явлений называется *диамагнитным эффектом*.

Магнитные свойства диамагнетиков обусловлены только диамагнитным эффектом, поэтому их намагничённость определяется индуцированным магнитным моментом

$$\vec{J} = n \vec{p}'_m = -\frac{e^2 Z}{4m} r'^2 n \vec{B} = -\frac{e^2 Z}{4m} r'^2 n \mu_0 \vec{H},$$

где n — концентрация атомов; Z — зарядовое число атома. Тогда магнитная восприимчивость единицы объёма

$$\chi_d = -\frac{\mu_0 n e^2 Z}{4m} r'^2. \quad (22.20)$$

Формула (22.20) не совсем точна. Вместо расстояния r'^2 в ней нужно взять среднее значение квадрата $\langle r'^2 \rangle$ расстояния электрона от ядра и просуммировать по всем электронам. Это уточнение приводит к выражению

$$\chi_d = -\frac{\mu_0 n e^2 Z}{6m} \sum_{k=1}^Z \langle r_k'^2 \rangle.$$

Зависимость намагничённости диамагнетика от напряжённости магнитного поля $J = f(H)$ приведена на рис. 22.11.

Магнитная восприимчивость диамагнетиков не зависит от напряжённости внешнего магнитного поля, поэтому для них характерно линейное намагничивание. Относительная магнитная проницаемость диамагнетиков μ постоянна и не зависит от напряжённости H внешнего магнитного поля (рис. 22.12). Поскольку магнитная восприимчивость таких материалов отрицательна, то $\mu < 1$.

Диамагнетиками являются инертные газы, молекулярные водород и азот, висмут, медь, цинк, золото, серебро, кремний, вода и ряд других неорганических и органических соединений. В неоднородном магнитном поле поведение диамагнетиков таково, что, например, стержень из висмута выталкивается в область более «слабого» поля и устанавливается так, чтобы ось стержня была перпендикулярна \vec{B} . Газы, входящие в состав продуктов сгорания, обладают диамагнитными свойствами, поэтому пламя свечи выталкивается из области более «сильного» поля.

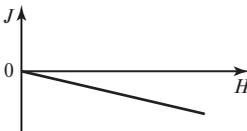


Рис. 22.11

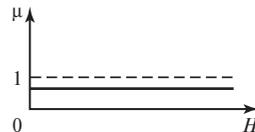


Рис. 22.12

22.5. Парамагнетики в магнитном поле

Парамагнетиками называются вещества, магнитная восприимчивость которых положительна, а относительная магнитная проницаемость незначительно больше единицы. К парамагнетикам относятся вещества, атомы которых обладают собственным магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых моментов электронов не равна нулю). При отсутствии внешнего магнитного поля парамагнетик не намагничен, так как из-за теплового движения собственные магнитные моменты атомов ориентированы беспорядочно, поэтому $\vec{J} = 0$.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле происходят два процесса: с одной стороны, за счет диамагнитного эффекта возникает намагниченность с направленностью, противоположной магнитной индукции внешнего поля, а с другой — собственные магнитные моменты атомов (молекул) ориентируются вдоль вектора магнитной индукции внешнего поля. Вклад собственных магнитных моментов преобладает, поэтому парамагнетики намагничиваются по направлению индукции внешнего магнитного поля.

Классическая теория парамагнетизма была разработана в 1905 г. французским физиком П. Ланжевеном. Он рассмотрел статистическую задачу о поведении молекулярных токов и их магнитных моментов в однородном магнитном поле. Оказалось, что намагниченность \vec{J} парамагнетика в поле зависит от параметра

$$a = \frac{p_m B}{kT}, \quad (22.21)$$

где k — постоянная Больцмана; T — температура. Данный параметр является отношением потенциальной энергии молекулярного тока в магнитном поле к средней энергии теплового движения атомов.

Если учесть, что $J_{\max} = np_m$, т.е. максимальная намагниченность материала возникает, когда все магнитные моменты атомов «выстраиваются» в одну сторону, то результаты расчетов Ланжевена можно записать в виде

$$J = J_{\max} \left(\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right). \quad (22.22)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи соотношения (22.22). Если $a \gg 1$, то все выражение в скобках в пределе равно 1. Поэтому в области низких температур (или достаточно сильных магнитных полей) намагниченность парамагнетика практически постоянна и равна максимальному значению. Это состояние называется состоянием магнитного насыщения парамагнетика. При комнатной темпера-

туре оно может быть достигнуто только в очень сильных ($B \sim 100$ Тл) магнитных полях.

Если $a \ll 1$, выражение в скобках в формуле (22.22) имеет предельное значение $a/3$. С учетом (22.21) намагниченность парамагнетика определяется следующим образом:

$$J = J_{\max} \frac{p_m B}{3kT} = \frac{np_m^2 B}{3kT}. \quad (22.23)$$

Отсюда, поскольку

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0},$$

получим выражение для магнитной восприимчивости

$$\chi_{m \text{ пар}} = \frac{np_m^2 \mu_0}{3kT}. \quad (22.24)$$

Таким образом, магнитная восприимчивость парамагнетика обратно пропорциональна его термодинамической температуре.

Относительная магнитная проницаемость парамагнетиков постоянна и не зависит от напряженности внешнего магнитного поля (рис. 22.13).

Так как магнитная восприимчивость парамагнетиков положительна, то магнитная проницаемость $\mu > 1$. На рис. 22.14 показана кривая намагничивания для парамагнетика. Поскольку магнитная восприимчивость такого материала не зависит от напряженности внешнего поля, то для парамагнетиков так же, как и для диамагнетиков, характерно линейное намагничивание.

Экспериментально установлено, что намагничивание парамагнетика действительно происходит в направлении, совпадающем с направлением вектора \vec{B} . При внесении парамагнитного стержня в неоднородное магнитное поле он сначала поворачивается и устанавливается вдоль линий магнитной индукции этого поля, а затем втягивается в область более сильного поля.

К парамагнетикам относятся многие металлы (щелочные и щелочно-земельные), кислород, оксид азота и др.

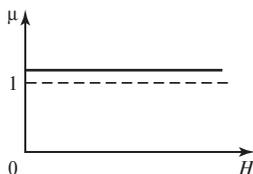


Рис. 22.13



Рис. 22.14

22.6. Ферромагнетизм

Ферромагнетиками называются вещества, обладающие при не слишком высоких температурах самопроизвольной (*спонтанной*) намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий — магнитного поля, деформации, температуры. Ферромагнетики в отличие от слабомагнитных диа- и парамагнетиков являются сильномагнитными средами: магнитная индукция поля внутри них может в сотни и тысячи раз превосходить магнитную индукцию внешнего поля в вакууме. Такими свойствами обладают, например, железо, кобальт, никель и материалы, содержащие атомы этих элементов. Исключением является нержавеющая сталь, которая является парамагнитной.

Большой вклад в экспериментальное изучение свойств ферромагнетиков внес русский физик А.Г. Столетов. В 1872 г. он исследовал зависимость намагниченности железа от напряженности магнитного поля. Предложенный им метод заключался в определении магнитного потока в ферромагнитных кольцах при помощи баллистического гальванометра. На рис. 22.15 показана схема установки Столетова.

На тороидальный сердечник из исследуемого материала намотаны две обмотки. Первичная обмотка 1 подключается к батарее B через реостат R и амперметр A . Ключ K в этой цепи позволяет изменять направление тока в цепи (полярность подключения батареи). Зная число витков обмотки и силу тока в ней, можно, используя закон полного тока, определить напряженность магнитного поля в сердечнике $H = In$, где I — сила тока в первичной обмотке; n — число витков на единицу длины обмотки.

Вторичная обмотка 2 подключена к баллистическому гальванометру G , измеряющему заряд, протекающий по виткам вторичной обмотки. При изменении направления тока в первичной обмотке на противоположный магнитный поток, сцепленный как с витками первичной, так и с витками вторичной обмоток, меняет свое значение. Во вторичной обмотке благодаря явлению электромагнитной индукции возникает ЭДС индукции и протекает заряд, который, с одной

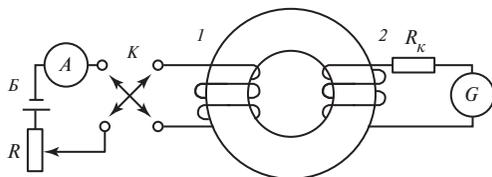


Рис. 22.15

стороны, измеряется гальванометром, а с другой — может быть рассчитан по формуле

$$|Q| = \frac{|\Psi_2 - \Psi_1|}{R_k} = \frac{2BSN}{R_k},$$

где Ψ_2 и Ψ_1 — соответственно конечное и начальное значения полного магнитного потока через вторичную катушку; R_k — электрическое сопротивление катушки; S — площадь поперечного сечения катушки; N — число витков катушки; B — магнитная индукция в тороидальном сердечнике. Откуда определяется значение магнитной индукции в ферромагнетике

$$B = \frac{|Q|R_k}{2SN}.$$

Проведя измерения для различных значений силы тока в первичной обмотке, можно экспериментально получить зависимость $B = f(H)$ (рис. 22.16), которая называется основной кривой намагничивания ферромагнетика. Используя соотношение $J = \frac{B}{\mu_0} - H$, можно рас-

считать намагниченность ферромагнетика и построить график зависимости намагниченности от напряженности поля $J = f(H)$ (рис. 22.17).

Анализ графиков показывает, что вид кривой намагничивания ферромагнетика существенно отличается от подобных зависимостей для диа- и парамагнетиков. Кроме того, начиная с некоторого значения напряженности магнитного поля H_s , ферромагнетик входит в состояние **магнитного насыщения**, когда дальнейший рост напряженности поля не приводит к росту намагниченности вещества.

Отличительной особенностью ферромагнетиков является то, что их относительная магнитная проницаемость быстро растет с возрастанием H , достигает максимума, а затем убывает, стремясь к единице в сильных магнитных полях (рис. 22.18). Отметим, что максимальное значение относительной магнитной проницаемости наступает раньше, чем ферромагнетик достигнет состояния насыщения: согласно выражению (22.7) значение μ определяется тангенсом угла наклона касательной к графику зависимости $B = f(H)$ (см. рис. 22.16).

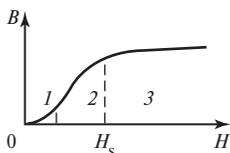


Рис. 22.16

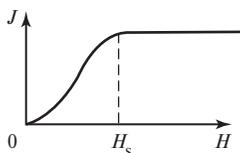


Рис. 22.17

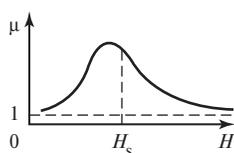


Рис. 22.18

Дальнейшее уменьшение значения μ при возрастании H можно объяснить тем, что при очень больших значениях H в выражении

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}$$

можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым. Тогда

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \approx \mu_0 \vec{H} \quad \text{и} \quad \mu \approx 1.$$

Дальнейшие теоретические и практические исследования показали, что такие необычные свойства ферромагнетиков объясняются их внутренней структурой. Дело в том, что при отсутствии внешнего магнитного поля внутри ферромагнетиков самопроизвольно возникают области намагничивания, в которых магнитные моменты отдельных атомов ориентируются в одном направлении. Объясняется это взаимодействием спиновых магнитных моментов соседних атомов и их взаимным влиянием. Квантово-механическое объяснение этого процесса достаточно сложно и не входит в программу нашего курса. Области спонтанного намагничивания внутри ферромагнетика получили название *доменов* (этот термин ввел П. Вейс в 1907 г.). Их линейный размер может достигать 0,01 мм. На рис. 22.19 показана различная ориентации магнитных моментов доменов внутри ферромагнетика. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения. Магнитные же моменты различных доменов ориентированы хаотично, поэтому в исходном состоянии ферромагнетик не обладает намагниченностью. Границы доменных зерен можно наблюдать с помощью обычного микроскопа. Для этого отшлифованный срез ферромагнетика достаточно покрыть слоем жидкости с мелкодисперсным ферритовым порошком. Поскольку на границе доменов магнитное поле резко неоднородно, то частицы порошка переместятся в жидкости так, что расположатся вблизи границ доменов.

При помещении ферромагнетика в магнитное поле происходит нарушение первичной доменной структуры. Это связано с тем, что различные домены обладают различной энергией в магнитном поле, причем эта энергия зависит от направления магнитного момента. Те домены, магнитные моменты

которых образуют острые углы с вектором \vec{H} , имеют меньшую энергию, т. е. находятся в энергетически более выгодных положениях, чем те, у которых эти углы тупые. При увеличении напряженности внешнего поля наблюдается укрупнение энергетически более выгодных доменов за счет соседних. Осуществляется это двумя способами.

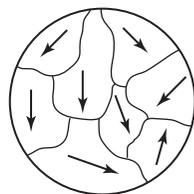


Рис. 22. 19

При малых значениях H наблюдается укрупнение доменов, имеющих меньшие значения энергии в поле. «Территории» соседних с ними доменов уменьшаются, так как атомы в прилегающих тонких слоях разворачивают свои магнитные моменты. Промежуточный результат этого процесса показан на рис. 22.20.

В итоге сумма магнитных моментов единицы объема вещества становится отличной от нуля, и намагниченность материала растет. Следует учесть, что рост магнитной индукции поля в веществе на данном этапе процесса намагничивания происходит не слишком сильно, так как в процессе участвуют не все атомы вещества (см. рис. 22.16, этап 1).

При больших значениях H , наряду с описанным процессом, происходит другой: отдельные домены начинают целиком поворачиваться, ориентируясь своими магнитными моментами по направлению вектора напряженности магнитного поля. Магнитные моменты доменов как бы «выстраиваются» вдоль линий магнитной индукции внешнего поля (см. рис. 22.16, этап 2). Поскольку намагниченность материала увеличивается при этом весьма существенно, то рост магнитной индукции и относительной магнитной проницаемости (см. рис. 22.18) оказывается очень сильным. Когда все домены ферромагнетика «выстроят» свои магнитные моменты в одном направлении, дальнейшее намагничивание материала оказывается невозможным и он достигает состояния магнитного насыщения; при этом границы между отдельными доменами исчезают. Увеличение магнитной индукции в веществе (см. рис. 22.16, этап 3) происходит лишь за счет увеличения напряженности внешнего поля.

Возникающая на определенном этапе необратимость намагничивания материала позволяет ферромагнетикам частично сохранять намагниченность после удаления их из поля. При уменьшении напряженности внешнего поля можно наблюдать процесс запаздывания уменьшения магнитной индукции \vec{B} . Этот процесс в ферромагнетиках получил название *магнитного гистерезиса* (от греческого *hystérēsis* — отставание, запаздывание). На рис. 22.21 показано, что

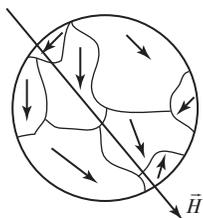


Рис. 22. 20

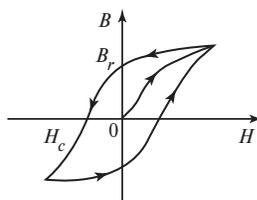


Рис. 22. 21

при уменьшении напряженности внешнего поля до нуля магнитная индукция в предварительно намагниченном ферромагнетике не принимает нулевого значения. Сохраняющееся при этом в веществе магнитное поле характеризуется *остаточной магнитной индукцией* B_r . Чтобы полностью размагнитить образец, необходимо поместить его в магнитное поле с противоположной ориентацией линий индукции (в «отрицательное поле»). Напряженность магнитного поля, необходимая для полного размагничивания ферромагнетика, называется *коэрцитивной силой* H_c (от латинского *coercitio* — удерживать). Цикл перемагничивания ферромагнетика описывается графиком, приведенным на рис. 22.21.

Этот график называется *петлей гистерезиса*. Можно показать, что площадь петли гистерезиса пропорциональна количеству теплоты, выделяющемуся в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания.

Согласованное участие магнитных моментов всех атомов в создании доменов и междоменное взаимодействие позволяют ферромагнетикам усиливать внешние поля в сотни, тысячи и миллионы раз.

Необычные свойства ферромагнетиков на этом не заканчиваются. Оказывается, при температуре выше некоторого критического значения ферромагнетик утрачивает ферромагнитные свойства. Впервые это явление обнаружил французский физик П. Кюри. Критическое значение температуры называется *точкой Кюри*.

При более высоких температурах ферромагнетик ведет себя во внешнем поле как обычный парамагнетик. При температуре точки Кюри в результате сильного теплового движения частиц происходит разрушение доменной структуры ферромагнетика. Для железа эта температура составляет $770\text{ }^{\circ}\text{C}$, для никеля $360\text{ }^{\circ}\text{C}$. Сплав железа с никелем — пермаллой, который используется для изготовления трансформаторных магнитопроводов, имеет точку Кюри всего $70\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Глава 23

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «МАГНЕТИЗМ»

Пример 23.1. Полусфера радиусом R , равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ , вращается с угловой скоростью ω относительно оси вращения Z (рис. 23.1). Найдите магнитную индукцию магнитного поля в центре полусферы.

Решим задачу методом суперпозиции, разбив полусферу на кольца шириной $R d\varphi$ и радиусами $r = R \sin \varphi$ (рис. 23.2). Элементарный заряд, находящийся на таком вращающемся кольце, эквивалентен элементарному току, текущему по неподвижному кольцу. Сила элементарного тока

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma \omega r dt R d\varphi}{dt} = \sigma \omega r R d\varphi.$$

Такой ток создает в центре полусферы магнитное поле, магнитная индукция которого определяется из (20.14):

$$dB = \frac{\mu_0 dI r^2}{2R^3} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3 d\varphi}{2R^2}.$$

Векторы всех элементарных магнитных индукций $d\vec{B}$ сонаправлены, поэтому результирующую магнитную индукцию определим так:

$$B = \int dB = \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{6}.$$

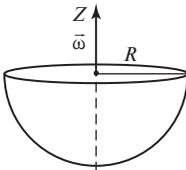


Рис. 23.1

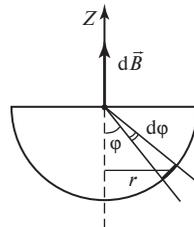


Рис. 23.2

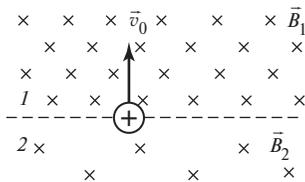


Рис. 23.3

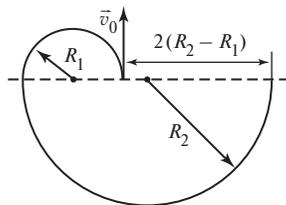


Рис. 23.4

Пример 23.2. Плоская горизонтальная граница разделяет пространство на две части. Сверху от плоскости магнитная индукция однородного магнитного поля равна \vec{B}_1 , а снизу — \vec{B}_2 , причем $B_1 > B_2$. Векторы магнитных индукций сонаправлены и горизонтальны (рис. 23.3). Положительно заряженная частица с массой m и зарядом q влетает со скоростью \vec{v}_0 в область 1 перпендикулярно границе. Определите среднюю скорость дрейфа частицы вдоль границы полей.

Траектория частицы, влетевшей в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции, представляет собой окружность. Радиус окружности определяется соотношением (20.27): $R = mv_0/(qB)$. Период обращения частицы по такой окружности $\tau = 2\pi R/v_0 = 2\pi m/(qB)$. В данной задаче цикл движения частицы состоит из двух полуокружностей, радиусы которых равны соответственно $R_1 = mv_0/(qB_1)$ и $R_2 = mv_0/(qB_2)$ (рис. 23.4). Из условия следует, что $R_2 > R_1$. Время движения частицы по первой полуокружности $\tau_1 = \pi m/(qB_1)$, по второй — $\tau_2 = \pi m/(qB_2)$. Следовательно, за время $\tau_1 + \tau_2$ частица сместится вдоль границы на расстояние $2(R_2 - R_1)$. Тогда средняя скорость дрейфа частицы

$$\langle v \rangle = \frac{2(R_2 - R_1)}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{2(B_1 - B_2)}{\pi(B_1 + B_2)} v_0.$$

Пример 23.3. Проводник длиной l с током силой I_2 расположен перпендикулярно бесконечно длинному проводу с током силой I_1 так, что наименьшее расстояние между проводниками равно x_0 (рис. 23.5). Найдите силу, действующую на проводник, и определите положение точки проводника, к которой приложена эта сила.

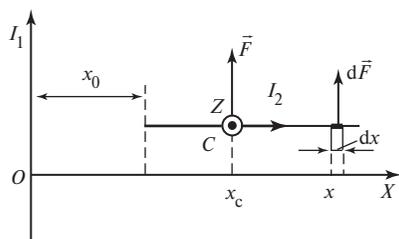


Рис. 23.5

Обозначим искомую силу \vec{F} , а точку ее приложения C . Очевидно, что момент силы \vec{F} относительно любой оси, проходящей через точку C , равен 0. Проведем такую ось Z перпендикулярно плоскости рисунка через точку C . Если разбить проводник длиной l на элементарные отрезки длиной dx , то элементарная сила $d\vec{F}$, действующая на каждый отрезок проводника, определится как $dF = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx$. Элементарный момент этой силы будет равен $dM = (x - x_C) dF$. Складывая все $d\vec{F}$ (они сонаправлены), получим:

$$F = \int_{x_0}^{x_0 + l} dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{x_0 + l}{x_0}.$$

Складывая все элементарные моменты, получим:

$$M_z = \int_{x_0}^{x_0 + l} dM_z = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left(l - x_C \ln \frac{x_0 + l}{x_0} \right) = 0.$$

Отсюда

$$x_C = \frac{l}{\ln \frac{x_0 + l}{x_0}}.$$

Пример 23.4. На горизонтальных проводящих рельсах лежит перемычка длиной l . С одного конца рельсы замкнуты резистором сопротивлением R . Магнитная индукция внешнего магнитного поля \vec{B}_0 направлена вертикально (рис. 23.6). Перемычке сообщают скорость v_0 вдоль рельсов. Найдите закон зависимости скорости пере-

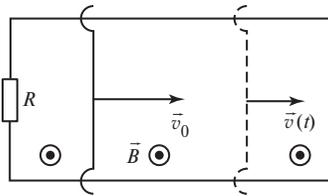


Рис. 23.6

мычки от времени. Определите количество теплоты, выделившееся к моменту времени t в резисторе. Трение отсутствует.

В проводящем контуре возникает ЭДС индукции, которую найдем по закону Фарадея — Максвелла:

$$|\mathcal{E}_i| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{Blv}{dt} = Blv.$$

Сила индукционного тока в перемычке находится по закону Ома: $I = |\mathcal{E}_i|/R = Blv/R$. На перемычку действует тормозящая сила со стороны внешнего магнитного поля: $F_A = IBl$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для перемычки:

$$m \frac{dv}{dt} = -F_A = -\frac{B^2 l^2 v}{R} dt.$$

Обозначая $\alpha = B^2 l^2 / (mR)$, получаем $dv/v = -\alpha dt$. Откуда получаем закон изменения скорости для перемычки $v(t) = v_0 e^{-\alpha t}$.

Выделившееся к моменту t в резисторе количество теплоты можно найти по закону Джоуля — Ленца следующим образом: $Q = \int_0^t I^2 R dt$. Однако проще определить искомую величину с помощью

теоремы об изменении кинетической энергии:

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - e^{-2\alpha t} \right).$$

Пример 23.5. Два соосных проводящих кольца (рис. 23.7) имеют радиусы R и r ($R \gg r$). Определите коэффициент взаимной индукции этих колец, если расстояние между их плоскостями равно d ($d \gg r$).

Проще всего определить коэффициент взаимной индукции из соотношения $L_{21} = \Phi_2/I_1$, где Φ_2 — магнитный поток через поверхность, ограниченную малым кольцом, созданный током силой I_1 в большом кольце. Условие задачи позволяет считать магнитное поле

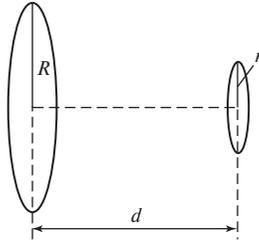


Рис. 23. 7

однородным в пределах малого кольца. Магнитная индукция этого поля равна:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Тогда $\Phi_2 = B_2 \pi r^2$. Окончательно получаем $L_{21} = \frac{\pi \mu_0 R^2 r^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$.

Пример 23.6. Узкое кольцо из ферромагнетика с прорезью (рис. 23.8, а) намагничено так, что магнитная индукция в прорези равна B (рис. 23.8, б). Ширина прорези d ничтожно мала по сравнению с длиной кольца l . Найдите напряженность магнитного поля H в ферромагнетике. Нарисуйте картину линий напряженности магнитного поля.

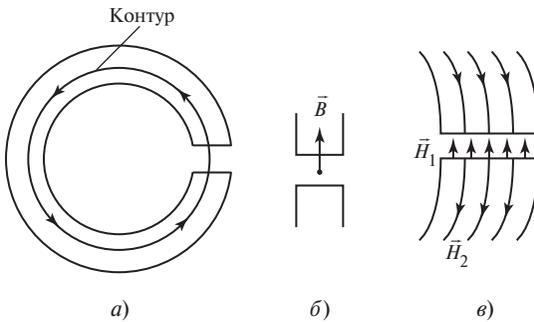


Рис. 23. 8

Из условия задачи следует, что модули напряженностей магнитного поля в зазоре \vec{H}_1 и в ферромагнетике \vec{H}_2 постоянны. Применим теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля, взяв среднюю линию кольца за замкнутый контур (рис. 23.8, а). Поскольку макротоки отсутствуют, то $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0$. Циркуляция вектора

\vec{H} приводится к виду:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_1 d - H_2 (l - d) \approx H_1 d - H_2 l = 0.$$

Поскольку $H_1 = B/\mu_0$, находим $H_2 = H_1 d/l = Bd/(\mu_0 l)$. Фрагмент картины линий напряженности магнитного поля приведен на рис. 23.8, в.

Глава 24

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебаниями называются процессы (движения или изменения состояния), обладающие той или иной повторяемостью во времени. Электрические колебания могут возникать в цепи, содержащей конденсатор и индуктивную катушку. Такая цепь называется *колебательным контуром*. В колебательном контуре периодически изменяются заряд и напряжение конденсатора и сила тока в индуктивной катушке, при этом происходит попеременное превращение энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля индуктивной катушки и наоборот — переход энергии магнитного поля индуктивной катушки в энергию электрического поля конденсатора.

Независимо от природы колебаний и характера колебательной системы все колебательные процессы подчиняются одним и тем же закономерностям. Это касается дифференциальных уравнений колебаний, их решений, характеристик *собственных, затухающих и вынужденных* колебаний. Поэтому при анализе электромагнитных колебаний будем использовать соотношения, аналогичные тем, что были получены при рассмотрении механических колебаний.

24.1. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления

Примером электрической цепи, в которой могут происходить свободные электрические колебания, служит простейший колебательный контур (рис. 24.1), состоящий из конденсатора емкостью C и соединенной с ним последовательно катушки индуктивностью L . При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора в колебательном контуре возникают свободные незатухающие колебания заряда конденсатора и силы тока в катушке. Рассмотрим процесс возникновения колебаний подробнее.

Исходное состояние системы показано на рис. 24.1, *а*. Конденсатор заряжен максимальным зарядом

$$q_m = CU_m,$$

где C — емкость конденсатора; U_m — напряжение на конденсаторе.

В пространстве между обкладками заряженного конденсатора существует электрическое поле, энергия которого $W_{э, m} = q_m^2 / (2C)$.

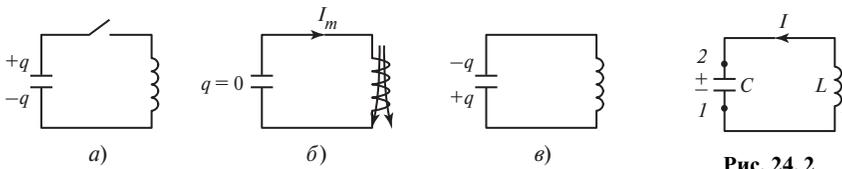


Рис. 24.1

Если конденсатор подключить к катушке, он начнет разряжаться, и в контуре возникнет электрический ток. При этом сила тока увеличивается постепенно от нуля до некоторого максимального значения, поскольку в катушке возникает ЭДС электромагнитной индукции, препятствующая увеличению силы тока в контуре. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но при этом будет возникать все увеличивающаяся энергия магнитного поля, обусловленного током через катушку. Энергия магнитного поля определяется индуктивностью катушки L и силой тока в цепи I : $W_m = LI^2/2$.

В тот момент, когда конденсатор полностью разряжается, его заряд, а значит, и энергия электрического поля обращаются в нуль, в то время как сила тока в цепи, а значит, и энергия магнитного поля достигают максимального значения (рис. 24.1, б):

$$W_{m\ m} = LI_m^2/2.$$

Несмотря на то что конденсатор полностью разряжен, в контуре продолжает существовать ток того же направления, так как возникающая в катушке самоиндукция препятствует теперь уже уменьшению силы тока в цепи. Сила тока уменьшается от максимально значения до нуля, а конденсатор заряжается. Знаки зарядов обкладок при этом противоположны знакам зарядов в исходном состоянии (рис. 24.1, в). Энергия магнитного поля катушки переходит в энергию электрического поля конденсатора. Далее вновь повторяется процесс разрядки конденсатора, но ток в контуре уже имеет противоположное направление. Так возникают электрические колебания в контуре.

Поскольку активное сопротивление контура равно нулю, полная энергия системы, состоящая из энергий электрического и магнитного полей остается постоянной:

$$W = W_э + W_m = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Определим закон изменения заряда конденсатора во времени. Для этого составим дифференциальное уравнение колебаний в колебательном контуре, схема которого приведена на рис. 24.2. Запишем

Рис. 24.2

закон Ома для участка цепи 1—L—2, приняв, что направление тока соответствует зарядке конденсатора:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s, \quad (24.1)$$

где R — сопротивление контура; \mathcal{E}_s — ЭДС самоиндукции.

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ на участке цепи 1—L—2 равна напряжению на конденсаторе, взятому со знаком «←»: $\varphi_1 - \varphi_2 = -U_C = -q/C$. Электродвижущая сила самоиндукции \mathcal{E}_s определяется законом Фарадея: $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$. Учтем, что сила тока при зарядке конденсатора равна первой производной заряда конденсатора по времени $I = dq/dt$.

Тогда ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s = -L \frac{d^2q}{dt^2}$. Подставляя разность потенциалов и ЭДС в уравнение (24.1) и учитывая, что $R = 0$, получаем:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0.$$

Разделим все слагаемые последнего уравнения на индуктивность катушки L :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Введя обозначение

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (24.2)$$

где ω_0 — частота собственных гармонических колебаний, получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (24.3)$$

Уравнение (24.3) называется *дифференциальным уравнением собственных незатухающих колебаний заряда* в колебательном контуре. Решением уравнения (24.3) является гармоническая функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (24.4)$$

где q_m — амплитудное значение заряда конденсатора; α — начальная фаза колебаний заряда.

Период собственных колебаний колебательного контура определяется по формуле Томсона

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (24.5)$$

С учетом (24.4) выведем закон изменения силы тока в контуре. Для этого найдем производную заряда по времени:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad (24.6)$$

где $I_m = q_m \omega_0$ — амплитуда силы тока.

Из сопоставления уравнений (24.4) и (24.6) видно, что колебания силы тока в контуре опережают колебания заряда по фазе на $\pi/2$, а по времени — на четверть периода. Графики изменения заряда конденсатора и силы тока в колебательном контуре при $\alpha = 0$ представлены на рис. 24.3.

Чтобы получить зависимость напряжения на обкладках конденсатора от времени, воспользуемся формулой:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (24.7)$$

где $U_m = q_m / C$ — амплитуда напряжения на конденсаторе.

Напряжение на конденсаторе изменяется со временем в одной фазе с зарядом конденсатора.

Отношение амплитудного значения напряжения на конденсаторе к амплитудному значению силы тока в цепи называют **волновым**

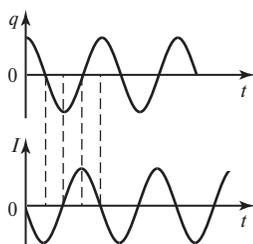


Рис. 24.3

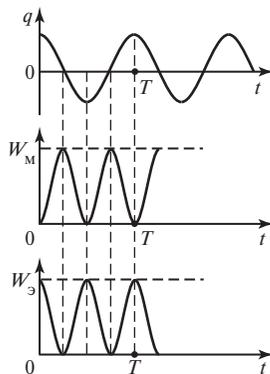


Рис. 24.4

сопротивлением контура (по аналогии с сопротивлением R в законе Ома для однородного участка цепи):

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{q_m}{C} \frac{1}{q_m \omega_0} = \frac{1}{C \omega_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (24.8)$$

Энергия электрического поля в конденсаторе и энергия магнитного поля в соленоиде во времени при нулевой начальной фазе колебаний изменяются согласно следующим зависимостям:

$$W_э = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t;$$

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2C} \sin^2 \omega_0 t.$$

Графики колебаний заряда, энергии магнитного и электрического полей представлены на рис. 24.4. Анализ приведенных зависимостей показывает, что колебания энергии магнитного и электрического полей происходят с частотой, равной удвоенной частоте собственных колебаний, а сумма этих энергий, равная полной энергии контура, с течением времени остается величиной постоянной. Значение полной энергии на рис. 24.4. показано штриховой линией.

24.2. Свободные затухающие колебания

В § 24.1 был рассмотрен процесс свободных гармонических (незатухающих) колебаний в контуре при отсутствии активного сопротивления. Проанализируем теперь колебательный процесс, происходящий в контуре при наличии резистора с сопротивлением R (рис. 24.5).

Будем считать, что направление тока в контуре соответствует зарядке конденсатора. Запишем для участка цепи 1—L—2 закон Ома:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s,$$

где $I = dq/dt$;

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -U_C = -q/C.$$

После подстановки и преобразований получим:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (24.9)$$

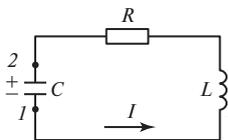


Рис. 24.5

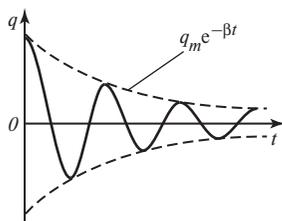


Рис. 24.6

Введем обозначения

$$R/L = 2\beta; \quad 1/(LC) = \omega_0^2. \quad (24.10)$$

С учетом этих обозначений соотношение (24.9) принимает стандартный вид *дифференциального уравнения затухающих колебаний*:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (24.11)$$

При условии, что $\beta^2 < \omega_0^2$, т.е. $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, его решение

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (24.12)$$

где φ — начальная фаза; ω — частота затухающих колебаний, причем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (24.13)$$

График затухающих колебаний заряда на обкладках конденсатора приведен на рис. 24.6.

Поскольку амплитуда колебаний заряда $q_m e^{-\beta t}$ уменьшается с течением времени, затухающие колебания не являются гармоническими. Однако для них удобно ввести понятие *условного периода* колебаний:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Анализ формулы (24.13) показывает, что при условии $\omega_0^2 \leq \beta^2$ колебания в системе не возникают. Значение максимального сопротивления контура, при котором еще возможно возникновение колеба-

ний, называется критическим сопротивлением $R_{кр}$. Его значение определяется из условия $\omega_0 = \beta$:

$$R_{кр} = 2\sqrt{L/C}. \quad (24.14)$$

Заметим, что период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Рассмотрим характеристики затухающих колебаний и сформулируем их *физический смысл*. Первая из них, непосредственно входящая в закон изменения колеблющейся величины, называется **коэффициентом затухания** β . Найдем отношение амплитуд колебаний в моменты времени $t = t_0$ и $t = t_0 + \tau$:

$$\frac{A(t_0)}{A(t_0 + \tau)} = \frac{q_m e^{-\beta t_0}}{q_m e^{-\beta(t_0 + \tau)}} = e^{\beta\tau}. \quad (24.15)$$

Время τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз, называется **постоянной времени**. Поскольку $e^{\beta\tau} = e$, то $\beta = 1/\tau$. Таким образом, коэффициент затухания равен величине, обратной времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний вводится также понятие **логарифмического декремента затухания колебаний** δ :

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (24.16)$$

Если за время $\tau = NT$ система совершит N колебаний и их амплитуда уменьшится в e раз, то

$$\delta = \beta T = T/\tau = 1/N_e.$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания — величина, обратная числу колебаний N_e , в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Колебательный контур часто характеризуют **добротностью** Q — величиной, обратно пропорциональной логарифмическому декременту:

$$Q = \pi/\delta. \quad (24.17)$$

Чтобы пояснить физический смысл добротности, рассмотрим относительное изменение энергии контура за один период. Амплитуда силы тока и напряжения на конденсаторе убывают по закону $e^{-\beta t}$. Энергия, запасенная в контуре, пропорциональна квадрату ампли-

туды силы тока (или квадрату амплитуды напряжения на конденсаторе). Следовательно, энергия убывает по закону $e^{-2\beta t}$. Относительное уменьшение энергии за период:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\delta}.$$

При незначительном затухании (при условии $\delta \ll 1$) $e^{-2\delta} \approx 1 - 2\delta$, в результате

$$\Delta W / W = 1 - (1 - 2\delta) = 2\delta.$$

Заменив в этом выражении логарифмический декремент δ через добротность контура Q в соответствии с формулой (24.17) и решив полученное уравнение относительно Q , получим:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}. \quad (24.18)$$

Таким образом, *добротность колебательного контура пропорциональна отношению энергии, запасенной в контуре, к ее убыли за один период.*

Для малого затухания колебаний в цепи $\beta \ll \omega_0$ период $T \approx \frac{1}{\omega_0} \approx 2\pi \sqrt{LC}$. Поэтому логарифмический декремент:

$$\delta = \beta T = \frac{R}{2L} 2\pi \sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}},$$

а добротность контура:

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (24.19)$$

Итак, *добротность контура равна отношению волнового сопротивления контура к его активному сопротивлению.*

24.3. Вынужденные электрические колебания

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодически изменяющееся воздействие. В случае электрических колебаний это можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура источник переменной ЭДС (рис. 24.7), изменяющейся во времени по гармоническому закону с частотой ω :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний можно получить, записав закон Ома для участка цепи 1—L—2 в виде:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s + \mathcal{E},$$

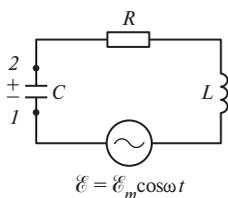


Рис. 24.7

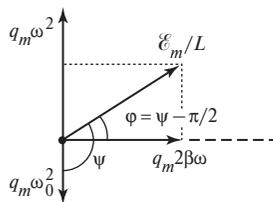


Рис. 24.8

где IR — падение напряжения на резисторе контура; $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов между точками 1 и 2; \mathcal{E}_s — ЭДС самоиндукции индуктивной катушки; \mathcal{E} — вынуждающая ЭДС, причем

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -U_C = -\frac{q}{C}, \quad \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

После подстановки и преобразований получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (24.20)$$

Если обозначить:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

то уравнение (24.20) приводится к виду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (24.21)$$

Уравнение (24.21) является **дифференциальным уравнением вынужденных колебаний**. Как было показано в гл. 6, частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi). \quad (24.22)$$

Амплитуда q_m вынужденных колебаний и сдвиг фаз ψ между колебаниями заряда и вынуждающей ЭДС зависят от частоты.

Найдем зависимости $q_m(\omega)$ и $\psi(\omega)$. Для этого возьмем производные от $q(t)$ по времени

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= -q_m \omega \sin(\omega t - \psi) = q_m \omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right), \\ \ddot{q}(t) &= -q_m \omega^2 \cos(\omega t - \psi) = q_m \omega^2 \cos(\omega t - \psi + \pi) \end{aligned}$$

и подставим их в формулу (24.21):

$$q_m \omega^2 \cos(\omega t - \psi + \pi) + q_m 2\beta \omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) + q_m \omega_0^2 \cos(\omega t - \psi) = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (24.23)$$

Напомним, что в уравнении (24.23) первое слагаемое представляет собой первую производную по времени от силы тока в контуре, второе слагаемое — произведение 2β на силу тока, третье слагаемое — произведение ω_0^2 на заряд конденсатора.

Используем метод векторных диаграмм. Будем изображать амплитуды гармонических функций, стоящих в левой части уравнения (24.23) векторами, модули которых равны $q_m \omega^2$, $q_m 2\beta \omega$ и $q_m \omega_0^2$. Направления этих векторов на векторной диаграмме (рис. 24.8) определяются сдвигом фаз между соответствующими слагаемыми уравнения (24.23). Направим вектор, изображающий амплитуду напряжения на резисторе $q_m 2\beta \omega$, горизонтально вправо и относительно него отложим два других вектора с учетом их фаз. Вектор, изображающий амплитуду напряжения на конденсаторе $q_m \omega_0^2$, отстает от напряжения на резисторе по фазе на $\pi/2$ — направим его вертикально вниз. Вектор, изображающий амплитуду падения напряжения на индуктивной катушке $q_m \omega^2$, опережает напряжение на резисторе по фазе на $\pi/2$ — направим его вертикально вверх. Результатом сложения этих трех векторов будет вектор, модуль которого равен \mathcal{E}_m/L .

Из векторной диаграммы на рис. 24.8 находим, что

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Используя теорему Пифагора, находим амплитуду вынужденных колебаний заряда:

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (24.24)$$

Разделив заряд q_m на электрическую емкость конденсатора C , получим амплитуду колебаний напряжения на конденсаторе:

$$U_m = \frac{q_m}{C} = \frac{\varepsilon_m}{CL \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (24.25)$$

Дифференцируя выражение (24.25) по переменной ω и приравнявая полученную производную к нулю, определяем **резонансную частоту** внешнего воздействия $\omega = \omega_p$, при которой амплитуда колебаний заряда или напряжения на конденсаторе достигает максимума:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

График зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты вынуждающей ЭДС при различных коэффициентах затухания контура β приведен на рис. 24.9.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенной частоте внешнего воздействия называется резонансом.

При неограниченном возрастании частоты внешнего воздействия ($\omega \rightarrow \infty$) амплитуда колебаний стремится к нулю.

При частоте вынуждающей ЭДС, близкой к частоте собственных гармонических колебаний $\omega \approx \omega_0$, из (24.25) можно получить:

$$\frac{U_m}{\varepsilon_m} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q,$$

что совпадает с формулой для добротности (24.19). Таким образом, *добротность контура показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе при резонансе больше амплитуды вынуждающей ЭДС.*

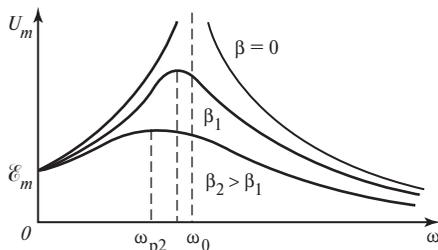


Рис. 24.9

Вернемся к закону колебания силы тока в цепи и исследуем его. Ранее было получено, что

$$I = q'(t) = -q_m \omega \sin(\omega t - \psi) = q_m \omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда следует, что колебания силы тока в цепи опережают по фазе на $\pi/2$ колебания напряжения на конденсаторе. Амплитуда колебаний силы тока:

$$I_m = q_m \omega = \frac{\mathcal{E}_m \omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (24.26)$$

Подставив в (24.26) частоту собственных колебаний и коэффициент затухания, выраженные через параметры контура R , C и L , получим:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}.$$

Величина Z называется **полным сопротивлением** (или импедансом) контура переменному току; $X_C = 1/(\omega C)$ — **емкостным сопротивлением**; $X_L = \omega L$ — **индуктивным сопротивлением**.

Емкостное и индуктивное сопротивления дают **реактивное сопротивление** контура, равное $X_C - X_L$. Сопротивление резистора R называется **активным сопротивлением** контура. Такая терминология показывает, что необратимое выделение тепла (т.е. энергетические потери контура) происходит только в резисторе. Смысл реактивного сопротивления заключается в том, что оно просто ограничивает силу тока в цепи, но не влияет на тепловые потери.

Амплитуда колебаний силы тока в контуре также зависит от частоты вынуждающей ЭДС и активного сопротивления. Максимальные значения амплитуды достигаются при одной и той же частоте — частоте собственных гармонических колебаний ω_0 (рис. 24.10). При частоте вынуждающей ЭДС, равной частоте собственных гармонических колебаний ($\omega = \omega_0$), реактивное сопротивление контура становится равным нулю, а полное сопротивление контура при этих условиях становится равным его активному сопротивлению.

Вернемся к векторной диаграмме (см. рис. 24.8). Умножив изображенные на ней векторы на индуктивность L катушки, получим векторы амплитуд напряжений на элементах контура (рис. 24.11). На диаграмме видно, что колебания силы тока в контуре по фазе отстают от колебаний вынуждающей ЭДС на угол $\varphi = \psi - \pi/2$, причем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

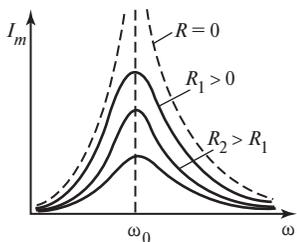


Рис. 24. 10

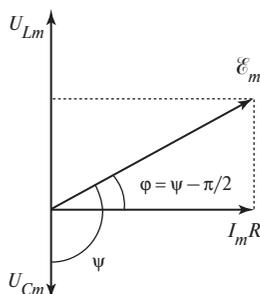


Рис. 24. 11

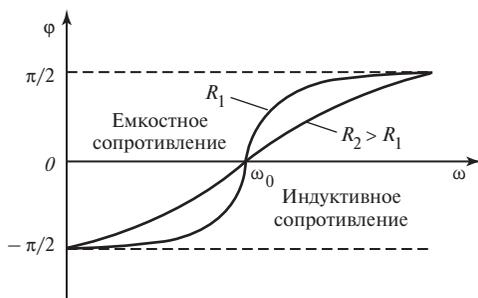


Рис. 24. 12

Зависимость фазового сдвига между ЭДС и силой тока от частоты вынуждающей ЭДС приведена на рис. 24.12. При частоте, меньшей частоты собственных колебаний, реактивное сопротивление контура имеет емкостной характер, при этом колебания силы тока опережают по фазе колебания вынуждающей ЭДС.

При частоте, большей частоты собственных колебаний, реактивное сопротивление контура имеет индуктивный характер, при этом колебания силы тока отстают по фазе от колебаний вынуждающей ЭДС. И наконец, при частоте вынуждающей ЭДС, равной частоте собственных колебаний, сопротивление контура становится чисто активным. При этом сумма падений напряжений на конденсаторе и индуктивной катушке равна нулю. По этой причине явление резонанса в последовательном колебательном контуре называют **резонансом напряжений**.

Глава 25

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Основы теории электромагнитного поля, сформулированные в работах М. Фарадея, нашли свое математическое завершение в работах Д.К. Максвелла. Развивая идеи Фарадея, он создал теорию электромагнитного поля, оформив ее в виде системы дифференциальных и интегральных уравнений (1863 г.), ввел понятие тока смещения, предсказал существование электромагнитных волн, выдвинул идею электромагнитной природы света.

В теории Максвелла решается основная задача электродинамики: определение характеристик электромагнитного поля заданной системы электрических зарядов и токов. Эта теория явилась величайшим вкладом в развитие классической физики. Она позволила с единой точки зрения охватить огромный круг явлений, начиная с поля неподвижных зарядов и кончая электромагнитной природой света.

Максвелл не рассматривает молекулярное строение среды и внутренний механизм процессов, происходящих в среде при наличии электромагнитного поля. Он рассматривает макроскопические электромагнитные поля макроскопических зарядов и токов, т.е. таких систем зарядов, пространственные размеры которых значительно больше размеров отдельных атомов и молекул.

Уравнения Максвелла в интегральной форме выражают соотношения, которые справедливы для мысленно проведенных в электромагнитном поле неподвижных замкнутых контуров и поверхностей. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме показывают связь характеристик поля и плотностей электрических зарядов и токов в каждой точке поля. Важно, что каждое из уравнений Максвелла не только имеет определенный математический смысл, но и описывает определенный физический процесс или постулирует важнейшие физические принципы существования материи в виде поля.

25.1. Первое уравнение Максвелла в интегральной форме

Согласно теории Фарадея, сущность явления электромагнитной индукции — возникновение ЭДС электромагнитной индукции, обнаружить которую можно по возникновению индукционного тока в замкнутом проводящем контуре. Индукционный ток появляется в

контуре при изменениях магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром. Если контур неподвижен, то изменения магнитного потока обусловлены изменением во времени магнитного поля.

Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители электрических зарядов. Эти сторонние силы могут быть только силами электрического поля, поскольку не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в контуре.

Обозначим напряженность поля сторонних сил $\vec{E}_{\text{стор}}$. С одной стороны, ЭДС индукции равна циркуляции вектора $\vec{E}_{\text{стор}}$ вдоль замкнутого контура L : $\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}$. С другой стороны, согласно закону электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

где интеграл берется по поверхности, ограниченной контуром. Поскольку контур неподвижен, то операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Вектор \vec{B} зависит как от времени, так и от координат. В правой части уравнения имеется в виду производная по времени от \vec{B} в неизменной точке поверхности, поэтому в подынтегральном выражении использован символ частной производной по времени.

Из рассмотренных уравнений следует, что

$$\oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (25.1)$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве электрического поля независимо от присутствия в этом пространстве проводящего контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить электрическое поле по возникновению индукционного тока.

Это поле $\vec{E}_{\text{стор}}$ существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами поля \vec{E}_q . Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и заканчиваются на зарядах. Циркуляция вектора \vec{E}_q по любому контуру равна нулю. Циркуляция вектора $\vec{E}_{\text{стор}}$ отлична от нуля, следовательно, поле $\vec{E}_{\text{стор}}$, как и магнитное поле, является вихревым. Линии напряженности вихревого поля замкнуты.

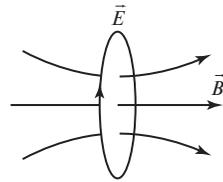


Рис. 25.1

Таким образом, в общем случае электрическое поле может быть как потенциальным, так и вихревым. Для напряженности суммарного поля остается справедливое соотношение

$$\oint_L \vec{E} \, d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{S}. \quad (25.2)$$

Уравнение (25.2) является первым уравнением Максвелла для электромагнитного поля. Математическая формулировка этого уравнения такова: циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному неподвижному замкнутому контуру равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур.

Обратим внимание, что это уравнение (как и все следующие) записывается в определенном порядке. Поскольку каждое уравнение связано с определенным физическим процессом, то справа от знака равенства указывается причина возникновения этого процесса, а слева — его следствие. Итак, соотношение (25.2) описывает следующий физический процесс: *изменяющееся во времени магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле.*

Линии индукции магнитного поля показаны на рис. 25.1. Если модуль магнитной индукции увеличивается, то в пространстве возникает вихревое электрическое поле, силовые линии которого также показаны на рисунке.

25.2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла в интегральной форме

Фарадей предположил, что существует взаимозависимость электрического и магнитного полей. Максвелл развил эту догадку Фарадея, предположив определенную симметрию этой взаимозависимости. Если изменяющееся во времени магнитное поле порождает

вихревое электрическое, то не может ли изменяющееся во времени электрическое поле порождать вихревое магнитное поле?

Рассмотрим простейший случай изменения во времени однородного электрического поля в плоском конденсаторе, площадь обкладок которого S , а поверхностная плотность заряда обкладок σ (рис. 25.2).

Пусть в цепи существует квазистационарный электрический ток, направление которого показано на рис. 25.2. Сила тока в цепи равна производной заряда конденсатора по времени:

$$I = dq/dt.$$

Движение свободных носителей заряда, т.е. ток проводимости, имеет место во всей цепи, кроме зазора между обкладками конденсатора. Максвелл предположил, что линии тока проводимости непрерывно переходят на границе обкладок в линии тока, названного им *током смещения*. Плотность тока проводимости в непосредственной близости от поверхности обкладок определяется выражением

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{dt} \left(\frac{dq}{S} \right) = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Таким образом, плотность тока проводимости равна скорости изменения поверхностной плотности заряда на обкладках конденсатора. В свою очередь поверхностная плотность свободного заряда σ равна проекции вектора электрического смещения на нормаль к поверхности, поэтому

$$d\sigma/dt = dD_n/dt.$$

Силовые линии электрического поля в конденсаторе перпендикулярны его обкладкам, поэтому $D_n = D$; откуда следует

$$j = dD/dt. \quad (25.3)$$

Слева от знака равенства записана плотность тока проводимости, справа — скорость изменения электрического смещения между обкладками конденсатора, там, где токи проводимости существовать не могут. Назовем скорость изменения электрического смещения dD/dt *плотностью тока смещения*. Придадим равенству (25.3) векторный смысл. При зарядке конденсатора его заряд возрастает, производная

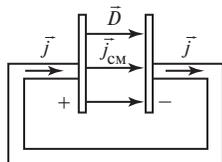


Рис. 25.2

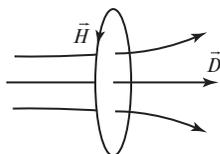


Рис. 25.3

вектора смещения по времени положительна ($\frac{d\vec{D}}{dt} > 0$) и направлена так же, как вектор смещения. Вектор плотности тока смещения направлен в этом же направлении. Следовательно, направление вектора плотности тока смещения совпадает с направлением производной вектора электрического смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = d\vec{D}/dt. \quad (25.4)$$

Соотношение (25.4) показывает, что линии тока смещения «продолжают» линии тока проводимости между обкладками конденсатора. Линии тока смещения «закрывают» электрическую цепь (рис. 25.2).

Таким образом, переменное во времени электрическое поле можно уподобить некоторому току, а значит, оно должно создавать магнитное поле. Эксперимент подтвердил эту гипотезу Максвелла: вокруг конденсатора было действительно обнаружено магнитное поле.

Запишем теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_{i \text{ макро}}$.

В правой части равенства записывается сумма всех макроскопических токов, существующих в системе и сцепленных с выбранным контуром. Согласно приведенным рассуждениям в эту сумму должны войти не только токи проводимости, но и токи смещения:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j} d\vec{S} = \int (\vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S}.$$

Тогда с учетом (25.4) можно записать:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{S} + \int \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}.$$

Если контур L неподвижен, а поле исследуется в фиксированной области пространства, в последнем слагаемом необходимо взять частную производную по времени:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{S} + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (25.5)$$

Уравнение (25.5) является *вторым уравнением Максвелла* для электромагнитного поля.

Итак, токи проводимости и токи смещения эквивалентны в смысле создания ими магнитного поля. Уравнение (25.5) показывает,

что циркуляция напряженности магнитного поля будет отлична от нуля и в том случае, когда выбранный контур не будет охватывать токи проводимости, а в пространстве будет существовать только переменное электрическое поле. На рис. 25.3 показаны линии магнитной индукции магнитного поля, возникающего при условии, что электрическое смещение возрастает $\left(\frac{dD}{dt} > 0\right)$.

Соотношение (25.5) описывает следующий физический процесс: *токи проводимости и изменяющееся во времени электрическое поле создают в пространстве вихревое магнитное поле*. Таким образом, магнитное поле может создаваться как токами проводимости, так и переменным электрическим полем.

25.3. Система уравнений Максвелла в интегральной форме

Введение Максвеллом понятия тока смещения свело воедино теорию электрических и магнитных явлений. Оказалось, что изменяющееся во времени магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле, а изменяющееся во времени электрическое поле создает в свою очередь магнитное поле, которое всегда является вихревым. Такая совокупность взаимосвязанных электрических и магнитных полей называется *электромагнитным полем*. Электромагнитное поле описывается системой фундаментальных уравнений Максвелла для неподвижных сред. В дополнение к двум уравнениям (25.2) и (25.5) запишем теоремы Гаусса для электрического и магнитного полей (соотношения (16.17) и (20.37)) и представим систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме:

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S \vec{j}_{\text{np}} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \oint_V \rho dV; \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

Напомним, что физический смысл двух последних уравнений системы (25.6) соответственно заключается в следующем:

1) источниками потенциального электрического поля являются неподвижные электрические заряды;

2) неподвижных источников вихревого магнитного поля («магнитных зарядов») не существует.

25.4. Дивергенция и ротор векторного поля

Для описания свойств векторных полей используются понятия дивергенции и ротора векторного поля. Сравнение теорем Гаусса для электрического поля, записанных в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (25.7)$$

и интегральной форме

$$\oint_S \vec{D} \, d\vec{S} = \oint_V \rho \, dV,$$

приводит к соотношению

$$\oint_S \vec{D} \, d\vec{S} = \oint_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV,$$

из которого следует, что поток векторного поля через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого поля по объему, ограниченному этой поверхностью. В этом заключается математический смысл теоремы Остроградского, сформулированной им для любого векторного поля.

Поскольку магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю $\left(\oint_S \vec{B} \, d\vec{S} = 0 \right)$, то дивергенция вектора магнитной индукции также равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (25.8)$$

Уравнения (25.7) и (25.8) являются записью соответственно *третьего* и *четвертого уравнений Максвелла* в дифференциальной форме.

Чтобы записать в дифференциальной форме первое и второе уравнения Максвелла, введем понятие ротора векторного поля. Для произвольного векторного поля, характеризуемого в каждой точке вектором \vec{A} , ротором (вихрем) поля называется вектор, равный максимальному значению предела отношения циркуляции поля по

произвольному замкнутому контуру к площади поверхности, ограниченной этим контуром, при стремлении последней к нулю (рис. 25.4).

При этом ротор вектора \vec{A} направлен в сторону единичной нормали к этой поверхности, выбранной в соответствии с направлением вектора \vec{A} по правилу правого винта. Математически это записывается следующим образом:

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} \, d\vec{l}}{S} \right) \vec{n}. \quad (25.9)$$

Отличие ротора векторного поля от нуля указывает на вихревой характер поля, т.е. на замкнутость его силовых линий.

Вернемся к первому уравнению Максвелла (25.2)

$$\oint_L \vec{E} \, d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{S}$$

и приведем его к дифференциальному виду.

В математике существует теорема Стокса, согласно которой для однозначной и непрерывной векторной функции \vec{A} справедливо соотношение

$$\oint_L \vec{A} \, d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} \, d\vec{S}, \quad (25.10)$$

т.е. циркуляция вектора \vec{A} по замкнутому контуру L равна потоку ротора этой функции через поверхность S , натянутую на контур L .

Ориентация вектора площадки $d\vec{S}$ должна быть согласована с ориентацией контура L по правилу правого винта.

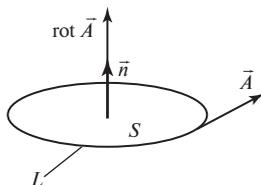


Рис. 25.4

Согласно теореме Стокса левая часть первого уравнения Максвелла равна потоку ротора вектора напряженности

$$\oint_L \vec{E} \, d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \, d\vec{S}.$$

Приравнявая правые части первого уравнения Максвелла и теоремы Стокса, имеем:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} \, d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{S}.$$

Из равенства интегралов следует равенство подынтегральных выражений:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \partial \vec{B} / \partial t. \quad (25.11)$$

Уравнение (25.11) представляет собой первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Отметим, что для потенциального электростатического поля $\oint_L \vec{E}_{\text{эл.ст}} \, d\vec{l} = 0$ и $\operatorname{rot} \vec{E}_{\text{эл.ст}} = 0$. Равенство нулю ротора вектора напряженности является необходимым и достаточным условием того, чтобы поле являлось потенциальным.

Приведем второе уравнение Максвелла (25.5)

$$\oint_L \vec{H} \, d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\text{пр}} \, d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{S}$$

к дифференциальной форме. Применяя теорему Стокса, получаем:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} \, d\vec{S} = \int_S \vec{j}_{\text{пр}} \, d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{S},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \partial \vec{D} / \partial t. \quad (25.12)$$

Выражение (25.12) представляет собой второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Уравнения Максвелла, записанные в дифференциальной форме, включают *операторы* дивергенции и операторы ротора векторного поля. Напомним, что оператор дивергенции представляет собой

сумму частных производных проекций вектора по соответствующим координатам:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Получим оператор ротора векторного поля \vec{A} . Поскольку согласно формуле (25.9) ротор — векторная величина, то для его нахождения определим компоненты разложения этого вектора в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = (\operatorname{rot} \vec{A})_x \vec{i} + (\operatorname{rot} \vec{A})_y \vec{j} + (\operatorname{rot} \vec{A})_z \vec{k}. \quad (25.13)$$

Каждое из этих слагаемых — вектор, направленный по соответствующей координатной оси. Так как ротор направлен по нормали к площадке, то это означает, что соответствующие площадки для определения компонент ротора должны быть сориентированы перпендикулярно координатным осям (рис. 25.5). Важно помнить, что площадки, изображенные на рис. 25.5, проходят через ту точку пространства, в которой требуется найти ротор поля.

Определим первый компонент ротора из (25.13). Для этого необходимо рассмотреть ту из трех площадок, показанных на рис. 25.5, которая перпендикулярна оси OX . Эта площадка расположена в плоскости ZOY (рис. 25.6).

Поскольку вектор $|\operatorname{rot} \vec{A}|_x \vec{i}$ на этом рисунке направлен из плоскости чертежа «на нас», то направление обхода контура, ограничивающего площадку, должно быть выбрано против часовой стрелки. Тогда циркуляция вектора \vec{A} по выбранному контуру

$$\oint_L \vec{A} \, d\vec{l} = A_y(z) \, dy + A_z(y + dy) \, dz + A_y(z + dz) \, dy(-1) + A_z(y) \, dz(-1),$$

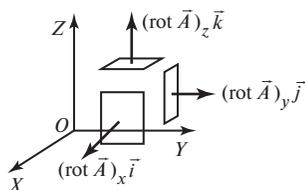


Рис. 25.5

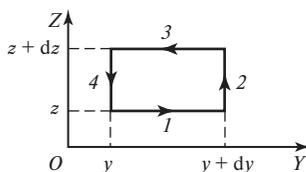


Рис. 25.6

где каждое из слагаемых представляет циркуляцию вектора \vec{A} по соответствующему элементу контура (они обозначены на рис. 25.6 цифрами 1, 2, 3, 4). Преобразуем полученное соотношение к виду

$$\oint_L \vec{A} \, d\vec{l} = [A_z(y + dy) - A_z(y)] \, dz - [A_y(z + dz) - A_y(z)] \, dy.$$

Для получения соответствующего компонента ротора согласно (25.9) необходимо разделить это выражение на площадь, т.е. на произведение $dzdy$:

$$(\text{rot } \vec{A})_x = \frac{A_z(y + dy) - A_z(y)}{dy} - \frac{A_y(z + dz) - A_y(z)}{dz} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Аналогично можно получить две другие проекции ротора:

$$(\text{rot } \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

В окончательном виде оператор ротора выглядит так:

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (25.14)$$

25.5. Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

Запишем систему четырех уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \partial \vec{B} / \partial t, & \text{(I);} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{j}_{\text{пр}} + \partial \vec{D} / \partial t, & \text{(II);} \\ \text{div } \vec{D} &= \rho, & \text{(III);} \\ \text{div } \vec{B} &= 0, & \text{(IV).} \end{aligned} \right\} \quad (25.15)$$

Эти уравнения, называемые *полевыми*, применимы для описания всех макроскопических явлений. При рассмотрении конкретной ситуации необходимо учесть электромагнитные свойства материаль-

ных сред. Свойства среды, учитываются с помощью еще трех уравнений, которые называются *материальными*:

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}; \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E}. \end{aligned} \right\} \quad (25.16)$$

Совокупность семи уравнений (25.15) и (25.16) образуют основу электродинамики покоящихся сред. Физический смысл уравнений Максвелла заключается в следующем. Уравнение (I) выражает закон электромагнитной индукции и указывает на изменяющееся магнитное поле как на один из возможных источников, порождающих электрическое поле. Вторым источником электрического поля являются электрические заряды. Они также порождают электрическое поле, что описывается уравнением (III), выражающим закон Кулона. Уравнение (II) выражает закон, по которому магнитное поле порождается токами проводимости и смещения, являющимися двумя возможными источниками магнитного поля. Уравнение (IV) означает, что нет магнитных зарядов, которые создавали бы магнитное поле подобно тому, как электрические заряды создают электрическое поле. Из уравнений Максвелла следует, что если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электрическое поле, то в окружающем заряды пространстве возникают взаимные превращения электрического и магнитного полей одного в другое. Эта совокупность последовательно сменяющих друг друга в пространстве электрического и магнитного полей называется **электромагнитным полем**.

Глава 26

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

В гл. 25 было выяснено, что переменное электрическое поле порождает магнитное поле, которое тоже оказывается переменным. Это переменное магнитное поле в свою очередь порождает электрическое поле. Если возбудить с помощью движущихся зарядов или переменного тока переменное электрическое или магнитное поле (электромагнитные колебания), то в окружающем пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Электромагнитные колебания, распространяющиеся в пространстве, называются *электромагнитной волной*.

Вывод о существовании электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. Из системы уравнений Максвелла получим дифференциальные уравнения, в левой и правой частях которых будут содержаться производные по времени и координатам только напряженности электрического или только напряженности магнитного поля. Эти уравнения называют *волновыми уравнениями* — их решениями являются *уравнения электромагнитной волны*. На основе анализа этих уравнений сформулируем свойства электромагнитных волн. Рассмотрим вопросы переноса энергии электромагнитной волной и особенности излучения электромагнитных волн электрическим диполем.

26.1. Волновой процесс. Уравнение волны

Ранее мы рассмотрели элементы теории электрических и механических колебаний. Были получены дифференциальные уравнения свободных, затухающих и вынужденных колебаний, а также их решения. Сравнение этих выражений показывает, что характер гармонического колебательного процесса и его причина никак не влияют на вид математического закона, описывающего отклонение колеблющейся величины от положения равновесия. Колебательные процессы в различных системах подчиняются одним и тем же закономерностям. Главное при рассмотрении колебаний — определить, что в какой-либо точке пространства происходит периодическое изменение рассматриваемой физической величины. Если отклонение параметра колебаний начинает передаваться в другие точки пространства, то говорят о возникно-

влении волнового процесса. Следовательно, *волна* — это физический процесс распространения колебаний, т.е. передачи *волнового возмущения* из одной точки пространства в другую.

С точки зрения характера колебаний, передаваемых волной, все волны делятся на два основных класса: поперечные волны и продольные волны.

Волна является *поперечной*, если колебания физической величины, переносимые волной, происходят в плоскости, перпендикулярной направлению движения волны. Примером таких механических волн может быть волна, передающая вдоль шнура его колебания в направлении, перпендикулярном оси шнура.

Волна является *продольной*, если колебания физической величины, переносимые волной, происходят в плоскости, параллельной направлению движения волны. Пример продольных механических волн — звуковая волна в упругой среде, передающая флуктуации плотности вещества. Упругие колебания частиц вещества в областях повышенной плотности вещества совершаются в направлении движения звуковой волны.

Итак, назовем *волновым возмущением* S отклонение физической величины от равновесного состояния, передающееся волной в пространстве от одной точки в другую. *Длиной волны* λ называется расстояние, на которое распространится волновое возмущение за время, равное периоду колебаний T . Если волновое возмущение распространяется со скоростью v , то справедливы следующие соотношения:

$$\lambda = vT; \quad T = 2\pi/\omega; \quad \lambda = 2\pi v/\omega. \quad (26.1)$$

Среди различных точек пространства, до которых дошло волновое возмущение, всегда найдутся такие точки, колебания в которых совпадают по фазе. Геометрическое место точек, колебательный процесс в которых происходит в одной фазе, образует *волновую поверхность*. По виду этой поверхности волны разделяют на плоские, сферические и т.д. Среди всех волновых поверхностей всегда существует самая внешняя (самая дальняя от источника волны), т.е. волновая поверхность, за которую волновое возмущение еще не распространилось. Эта

волновая поверхность называется *фронтом волны*. Следовательно, волновой процесс можно представить переносом фронта волны во времени и пространстве с некоторой скоростью.

Рассмотрим плоскую волну, переносящую колебания вдоль некоторой оси OX (рис. 26.1). Фронт такой волны представляет собой плоскость, параллельную плос-

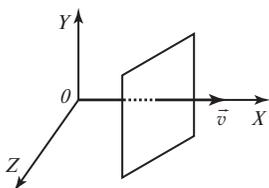


Рис. 26.1

кости ZOY . Пусть фронт движется вдоль оси OX со скоростью v . Допустим, что источник волны располагается в начале координат. Тогда в этой точке совершаются колебания по закону

$$S(t) = A \cos(\omega t + \alpha),$$

где A — амплитуда колебаний; ω — их частота. В точке, отстоящей от начала координат на расстояние x вдоль оси OX , колебания начнутся позже, чем в источнике. Задержка во времени составит $\Delta t = x/v$. Следовательно, закон колебаний в этой точке примет вид:

$$S(x, t) = A \cos[\omega(t - x/v) + \alpha]. \quad (26.2)$$

Видно, что волновое возмущение в различных точках пространства зависит от времени, а в фиксированный момент времени различно в разных точках. Поэтому выражение (26.2) описывает не просто колебания, а волновой процесс. Соотношение (26.2) называется **уравнением плоской волны**, бегущей вдоль оси OX . Нетрудно получить, что для волны, бегущей против оси OX , уравнение имеет вид:

$$S(x, t) = A \cos[\omega(t + x/v) + \alpha].$$

Выражение, служащее аргументом гармонической функции, называется **фазой волны**. Скорость распространения волнового фронта называется **фазовой скоростью волны**. Поскольку волновой фронт — совокупность точек с постоянной фазой, то для него $\omega(t - x/v) + \alpha = \text{const}$. Если выражение фазы волны продифференцировать по времени, то получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right] = \omega \left(1 - \frac{1}{v} \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

откуда $v = dx/dt$.

Преобразуем (26.2) с учетом (26.1):

$$S(x, t) = A \cos \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha \right] = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (26.3)$$

где

$$k = 2\pi/\lambda \quad (26.4)$$

называется **волновым числом**.

Если сравнить соотношения $\omega = 2\pi/T$ и $k = 2\pi/\lambda$, то можно сделать вывод, что λ — это «пространственный период» волны, а T — «временной период». Если частота ω показывает число колебаний, которые совершаются за время 2π с, то волновое число показывает, сколько длин волн укладывается на длине 2π м. Между этими параметрами волны существует следующая связь:

$$v = \omega/k. \quad (26.5)$$

Из соотношения (26.3) видно, что если расстояние между двумя точками пространства равно λ , то фазы волны в этих точках одина-

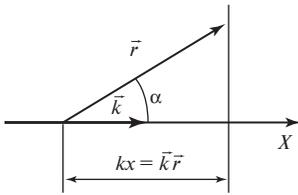


Рис. 26. 2

ковы. Поэтому можно дать еще одно определение длины волны: это минимальное расстояние между точками, колебания в которых совершаются в одной фазе. Верно и такое определение: длина волны — это расстояние, на которое смещается волновой фронт за время, равное периоду колебаний.

Соотношение (26.3) записано для случая, когда ось X совпадает с направлением распространения волны. От этого ограничения можно освободиться с помощью волнового вектора \vec{k} , который направлен вдоль распространения волны. Пусть \vec{r} — радиус-вектор некоторой точки на плоскости постоянной фазы. Очевидно, что $\vec{k} \vec{r} = kx$ (рис. 26.2) и вместо (26.3) можно записать

$$S(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha).$$

26.2. Волновое уравнение

Волновым уравнением называется дифференциальное уравнение, решением которого является уравнение волны. Если при анализе какого-либо физического процесса мы получим уравнение, по своей форме соответствующее волновому уравнению, значит исследуемый нами физический процесс имеет волновой характер.

Допустим, исследуется плоская волна, подчиняющаяся уравнению (26.3).

Найдем первые и вторые частные производные функции $S(x, t)$ по времени и координате:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = Ak \sin(\omega t - kx + \alpha); \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -k^2 S;$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \alpha); \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -\omega^2 S.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Если учесть выражение (26.5), то можно получить

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (26.6)$$

В общем случае, если волна не плоская, а распространяется по всем направлениям прямоугольной системы координат, то уравнение (26.6) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (26.7)$$

Полученное соотношение (26.7) называется **волновым уравнением**. Его принято записывать в сокращенной форме, учитывая, что в левой части уравнения стоит оператор Лапласа:

$$\Delta S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

26.3. Уравнение электромагнитной волны

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Максвелла и решим ее, получив законы изменения напряженностей магнитного и электрического полей. Для упрощения рассмотрим существование электрического и магнитного полей при отсутствии свободных зарядов и токов проводимости. В этом случае $\text{div } \vec{E} = 0$ и $\vec{j}_{\text{пр}} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.8)$$

Метод решения данной системы уравнений заключается в их объединении. Выберем четвертое уравнение системы и продифференцируем его по времени:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right).$$

Поскольку смешанная производная не зависит от порядка переменных, по которым берутся производные, то

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \right).$$

В правую часть уравнения подставим $\partial H_z/\partial t$ и $\partial H_y/\partial t$, взяв их из третьего и второго уравнений системы (26.8):

$$\begin{aligned} \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \frac{1}{\mu\mu_0} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \frac{1}{\mu\mu_0} = \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся седьмым уравнением системы (26.8) и получим:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right).$$

Это уравнение можно записать таким образом:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \Delta E_x.$$

Аналогичные уравнения можно получить и для других проекций напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \Delta E_y; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \Delta E_z.$$

Обобщая три последних соотношения, запишем

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (26.9)$$

Аналогично можно получить

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (26.10)$$

Полученные уравнения по своему виду соответствуют волновому уравнению (26.7). А поэтому из уравнений Максвелла следует: *электромагнитное поле, т.е. совокупность переменных электрического и магнитного полей, распространяется в пространстве в виде волны со скоростью*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}. \quad (26.11)$$

Распространяющееся в пространстве электромагнитное поле называется *электромагнитной волной*. Такая волна переносит из одной точки пространства в другие колебания напряженностей электрического и магнитного полей.

26.4. Поперечность электромагнитных волн

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, бегущую вдоль оси OX . Следовательно, в плоскости фронта волны (она параллельна плоскости ZOY) значения напряженностей полей не зависят от координат y и z . Это означает, что часть уравнений системы (26.8) и часть слагаемых в них исчезнут. Среди производных по координатам должны остаться только те компоненты системы, которые описывают изменение напряженностей полей вдоль оси OX . В оставшихся уравнениях остаются только производные по координате x , т.е. $\partial / \partial x$:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \\ 0 &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}; \end{aligned} \right\} \quad (26.12a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.126)$$

Выберем из (26.12а) третье и пятое уравнения. Продифференцируем их еще раз по x и по t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t}; & \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}; & \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} &= -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Подставим эти уравнения одно в другое:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Сравнив эти соотношения с выражением (26.6), можно записать:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}.$$

На основании последних уравнений сделаем вывод: уравнения плоской электромагнитной волны, бегущей вдоль оси OX , имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_y(x, t) &= E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_y); \\ H_z(x, t) &= H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_M). \end{aligned} \right\} \quad (26.13)$$

Мы получили результат: если волна распространяется вдоль оси OX , то напряженности электрического и магнитного полей в ней направлены по осям OY и OZ соответственно. Если при выводе системы уравнений плоской волны из системы (26.12) воспользоваться вторым и шестым уравнениями, то получим

$$\begin{aligned} E_z(x, t) &= E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_y); \\ H_y(x, t) &= H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_M). \end{aligned}$$

В любом случае колебания векторов напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, т.е. перпендикулярной скорости волны. Следовательно, **электромагнитная волна является поперечной**.

Неиспользованными пока остались первое, четвертое, седьмое и восьмое уравнения системы (26.12). Проанализируем выводы, которые можно получить с их помощью.

Из первого и восьмого уравнений получаем:

$$\partial H_x / \partial t = 0, \partial H_x / \partial x = 0.$$

Это означает, что если существует компонента напряженности магнитного поля, направленная по оси OX , то она не изменяется во времени и по координате x :

$$H_x = \text{const}(x, t).$$

Из четвертого и седьмого уравнений получаем:

$$\partial E_x / \partial t = 0, \partial E_x / \partial x = 0.$$

Это означает, что если существует компонента напряженности электрического поля, направленная по оси OX , то она не изменяется во времени и по координате x :

$$E_x = \text{const}(x, t).$$

Итак, уравнения Максвелла допускают суперпозицию плоской электромагнитной волны и стационарных электрических и магнитных полей. Если такие поля отсутствуют, т.е. $H_x = E_x = 0$, то взаимное расположение векторов \vec{H} , \vec{E} и \vec{v} в некоторый момент времени изображено на рис. 26.3. Видно, что выполняется следующее соотношение:

$$\vec{v} = v \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{EH}. \quad (26.14)$$

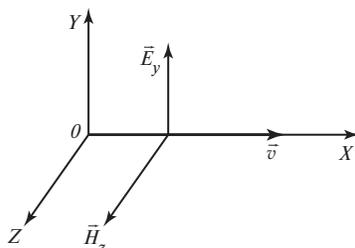


Рис. 26.3

26.5. Скорость электромагнитной волны

Проанализируем выражение (26.11), которое мы получили для скорости электромагнитной волны:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}.$$

Поскольку ε и μ — безразмерные величины, то размерность скорости волны определится так:

$$[v] = \frac{1}{\sqrt{[\varepsilon_0\mu_0]}}.$$

Ранее мы указывали, что $[\varepsilon_0] = \text{Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$ и $[\mu_0] = \text{Н} \cdot \text{А}^{-2}$. Это означает, что $[\varepsilon_0\mu_0] = \text{Кл}^2 \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$. Если учесть, что $\text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}$, то после преобразований получим

$$[v] = \text{м/с}.$$

Таким образом, выражение (26.11) действительно соответствует скорости. Более того, если вычислить значение скорости электромагнитной волны в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$), то

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Полученное выражение строго совпадает с экспериментально измеренной скоростью распространения света в вакууме. Следовательно, скорость света в вакууме определяется как

$$c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}. \quad (26.15)$$

Таким образом, уравнения Максвелла предсказали электромагнитную природу света.

В любой среде, отличной от вакуума по своим электрическим и магнитным свойствам, т.е. если $\varepsilon \neq 1$ или $\mu \neq 1$, электромагнитная волна распространяется со скоростью, меньшей чем в вакууме в n раз:

$$v = c/n, \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (26.16)$$

где величина n — показатель преломления среды.

26.6. Соотношение магнитной и электрической компонент в электромагнитной волне

Уравнения Максвелла показывают взаимозависимость электрического и магнитного полей, которые возбуждают друг друга в электромагнитной волне. Возникает вопрос: как связаны между собой амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей? Кроме того, получив соотношения (26.13), мы доказали, что электрическое и магнитное поля в волне изменяются с одинаковыми частотами, а также с одинаковыми «пространственными периодами» λ . Необходимо рассмотреть связь: каково отличие фаз электрической и магнитной составляющих электромагнитной волны? Объединим выражения (26.13) и пятое уравнение системы (26.12) в одну систему:

$$\left. \begin{aligned} E_y(x, t) &= E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_3); \\ H_z(x, t) &= H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_M); \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{aligned} \right\}$$

Подставим первое и второе уравнения в третье:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_3), \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = H_0 k \sin(\omega t - kx + \alpha_M);$$

$$H_0 k \sin(\omega t - kx + \alpha_M) = \varepsilon\varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_3). \quad (26.17)$$

Соотношение (26.17) будет выполняться только, если $\alpha_M = \alpha_3$ (откуда следует, что фазы колебаний электрической и магнитной компонент волны совпадают) и $H_0 k = \varepsilon\varepsilon_0 E_0 \omega$.

Воспользуемся выражениями (26.5) и (26.11):

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_0 = H_0 \frac{k}{\omega} = H_0 \frac{1}{v} = H_0 \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}.$$

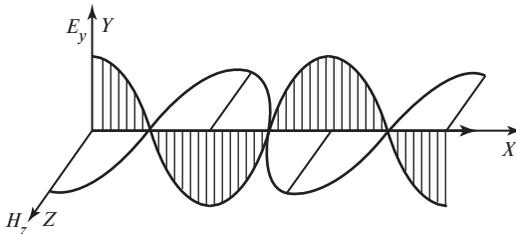


Рис. 26.4

Последнее равенство можно переписать в виде:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0 = H_0\sqrt{\mu\mu_0}. \quad (26.18)$$

Графически изобразить наблюдаемые колебания векторов \vec{E} и \vec{H} можно, если зафиксировать их направления и модули в различных точках пространства в некоторый момент времени, как показано на рис. 26.4.

26.7. Энергия электромагнитного поля

Электромагнитная волна переносит энергию. Для описания процесса переноса энергии вводится векторная величина, называемая *плотностью потока энергии*. Она численно равна энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса энергии.

Плотность энергии электромагнитного поля w складывается из плотности энергии электрического и плотности энергии магнитного полей:

$$w = w_э + w_м = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2 + \mu\mu_0 H^2/2. \quad (26.19)$$

С учетом того, что в данной точке пространства векторы \vec{E} и \vec{H} изменяются в одной фазе, соотношение между амплитудными значениями определяется равенством (26.18), что справедливо и для мгновенных значений:

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}. \quad (26.20)$$

Поэтому формулу (26.19) можно переписать:

$$w = 2w_э = \varepsilon\varepsilon_0 E^2.$$

Воспользовавшись соотношением (26.20), выражению для плотности энергии электромагнитной волны можно придать вид:

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH. \quad (26.21)$$

Рассмотрим перенос энергии через площадку ΔS за время Δt (рис. 26.5). За время Δt через площадку осуществляется перенос энергии, заключенной в объеме цилиндра с площадью основания ΔS и длиной $v\Delta t$: $W = w\Delta S v\Delta t$.

Подставляя в последнее выражение формулу для объемной плотности энергии (26.21) и учитывая (26.11), имеем:

$$W = \Delta S \Delta t E H. \quad (26.22)$$

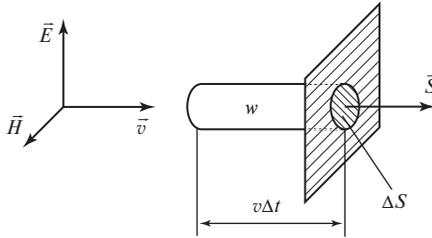


Рис. 26.5

Разделив левую и правую части соотношения (26.22) на $\Delta S \Delta t$, получим выражение для плотности потока энергии, которую обозначим символом S :

$$S = EH.$$

Учитывая, что векторы \vec{E} и \vec{H} образуют правовинтовую систему, вектор плотности потока энергии \vec{S} представим в виде векторного произведения

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (26.23)$$

Вектор \vec{S} называется вектором Пойнтинга.

26.8. Излучение диполя

Источниками электромагнитных волн могут быть изменяющиеся во времени заряды или изменяющиеся во времени токи. Рассмотрим излучение электромагнитных волн электрическим диполем, в котором два точечных заряда $+q$ и $-q$ колеблются в противофазе по гармоническому закону относительно некоторой точки O (рис. 26.6, а).

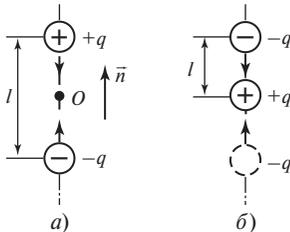


Рис. 26.6

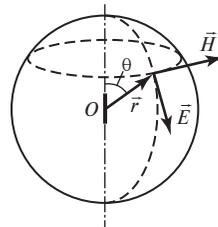


Рис. 26.7

Дипольный электрический момент такой системы изменяется во времени по закону

$$\vec{p} = (ql \cos \omega t) \vec{n} = \vec{p}_e \cos \omega t, \quad (26.24)$$

где l — удвоенная амплитуда колебаний каждого из зарядов; \vec{n} — единичный вектор, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному заряду.

Такой же электрический момент имеет система, образованная неподвижным положительным зарядом $+q$ и колеблющимся около него с амплитудой l отрицательным зарядом $-q$ (рис. 26.6, б). Рассмотрение такой излучающей системы важно потому, что к ней можно свести излучение электромагнитных волн электроном атома.

В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля имеет очень сложный характер. Она сильно упрощается в так называемой волновой зоне диполя, которая начинается на расстояниях r , значительно превышающих длину волны ($r \gg \lambda$). В этой зоне фронт волны будет сферическим (рис. 26.7).

Векторы \vec{E} и \vec{H} в каждой точке взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к лучу, т. е. радиусу-вектору, проведенному в данную точку из диполя. В сферической волне амплитуда колебаний убывает с расстоянием от излучателя. Таким образом, амплитуды колебаний E_m и H_m в некоторой точке пространства зависят от расстояния r до излучателя и угла θ между направлением радиуса-вектора и осью диполя. Эта зависимость для вакуума имеет вид:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \theta.$$

Среднее значение плотности потока энергии $\langle S \rangle$ пропорционально произведению $E_m H_m$ т.е.

$$\langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (26.25)$$

Из этой формулы вытекает, что значение плотности потока энергии S изменяется вдоль луча (при $\theta = \text{const}$) обратно пропорционально квадрату расстояния от излучателя. Кроме того, значение S зависит от угла θ . Сильнее всего диполь излучает в направлениях, перпендикулярных к его оси ($\theta = \pi/2$). В направлениях, совпадающих с осью ($\theta = 0$ и π), электрический диполь не излучает. Зависимость плотности потока энергии волны S от угла θ в плоскости, проходящей через ось диполя (диаграмма направленности излучения диполя), приведена на рис. 26.8.

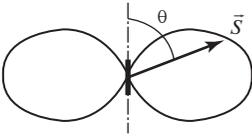


Рис. 26. 8

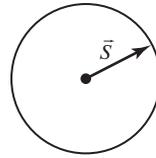


Рис. 26. 9

В плоскости, перпендикулярной оси диполя, интенсивность волны одинакова во всех направлениях и диаграмма направленности излучения имеет вид окружности (рис. 26.9).

Энергия, излучаемая по всем направлениям за единицу времени, называется *мощностью излучения* P . Мощность излучения элементарного диполя равна:

$$P = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{6\pi c^2} \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2.$$

Если диполь образован системой из неподвижного и колеблющегося зарядов, то с учетом выражения (26.24) вторая производная электрического момента диполя по времени

$$d^2 p / dt^2 = -ql\omega^2 \cos \omega t = -qa,$$

где a — ускорение колеблющегося заряда. В этом случае формулу для мощности излучения можно записать следующим образом:

$$P = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{q^2 a^2}{6\pi c^2}. \quad (26.26)$$

Эта формула сохраняет свое значение и при произвольном движении заряда. *Всякий заряд, движущийся с ускорением, возбуждает электромагнитные волны*, причем мощность излучения определяется формулой (26.26).

Раздел IV

ОПТИКА. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Глава 27

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

27.1. Сложение колебаний

Если необходимо определить сумму нескольких гармонических колебаний, происходящих с одинаковой циклической частотой ω , причем каждое последующее слагаемое суммы имеет фазовый сдвиг φ_0 относительно предыдущего:

$$S = \sum_{i=1}^N A \cos[\omega t + (i-1)\varphi_0],$$

то удобно воспользоваться *методом векторных диаграмм*. Суть этого метода проста и заключается в следующем: проекция суммарного вектора на произвольную ось равна сумме проекций на эту ось всех векторов-слагаемых. Колеблющуюся величину можно представить вектором, длина которого равна амплитуде колебания, а угол между вектором и выбранной осью X — фазе колебания (рис. 27.1). В этом случае результирующее колебание найдем, сложив сначала векторы, представляющие колебания-слагаемые, определив амплитуду — модуль суммарного колебания и фазу — угол между вектором суммарного колебания и выбранной осью X .

Покажем на рисунке векторную диаграмму сложения трех колеблющихся величин:

$$S = A \cos \omega t + A \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + 2\varphi_0).$$

Изобразим на рисунке равные по модулю векторы $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$, представляющие слагаемые суммы (рис. 27.2).

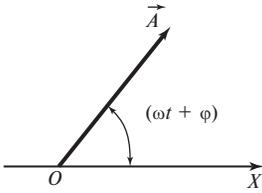


Рис. 27.1

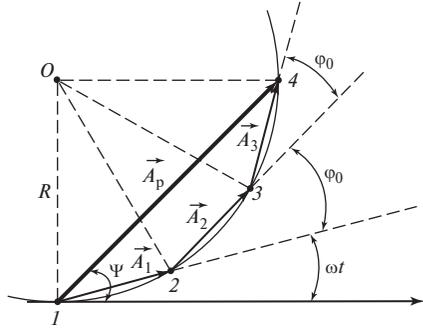


Рис. 27.2

Сложение векторов выполним по правилу треугольника. Обозначив радиус окружности, проходящей через точки 1, 2, 3 и 4 как R , получим из треугольников $O12$ и $O14$ формулы:

$$\frac{A}{R} = 2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \quad \text{и} \quad \frac{A_p}{R} = 2 \sin \frac{3\varphi_0}{2}.$$

Из рис. 27.2 видно, что вектор \vec{A}_p , определяющий результирующее колебание S , образует с осью абсцисс угол ψ , равный:

$$\psi = \omega t + \frac{N-1}{2} \varphi_0 = \omega t + \varphi_0$$

(у нас число колебаний $N=3$). Результат сложения позволяет определить результирующее колебание S :

$$S = A \frac{\sin \frac{3\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cos \left(\omega t + \frac{2\varphi_0}{2} \right).$$

Обобщая полученный результат на случай, когда число складываемых колебаний равно N , приходим к формуле:

$$S = \sum_{i=1}^N A \cos [\omega t + (i-1)\varphi_0] = A \frac{\sin \frac{N\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cos \left(\omega t + \frac{N-1}{2} \varphi_0 \right).$$

Здесь множитель $A \left| \frac{\sin \frac{N\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \right|$ является амплитудой результирующего колебания, а выражение $\left(\omega t + \frac{N-1}{2} \varphi_0 \right)$ представляет его фазу.

Представляет интерес случай, когда складываются два колебания одинаковой частоты и равной амплитуды, тогда амплитуда результирующего колебания равна $2A \left| \cos \frac{\varphi_0}{2} \right|$, и можно сделать вывод: при $\varphi_0 = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) происходит максимальное усиление складываемых колебаний (результирующее колебание имеет двойную амплитуду и учетверенную интенсивность по сравнению с каждым из складываемых колебаний); если выполнено условие $\varphi_0 = \pi(2n - 1)$ ($n = 1, 2, \dots$), то амплитуда результирующего колебания равна нулю, т.е. происходит полное *гашение* одного колебания другим. Зависимость результирующей амплитуды и интенсивности от угла φ_0 показана на рис. 27.3, а, б.

Когерентность называется согласованное протекание волновых или колебательных процессов. Две волны будут когерентными, если в любой точке пространства частоты колебаний будут одинаковыми, а разность фаз этих колебаний не будет зависеть от времени. В частности, две плоские электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль оси X и описываемые уравнениями

$$E_1 = A \cos(\omega t - kx);$$

$$E_2 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

будут когерентными.

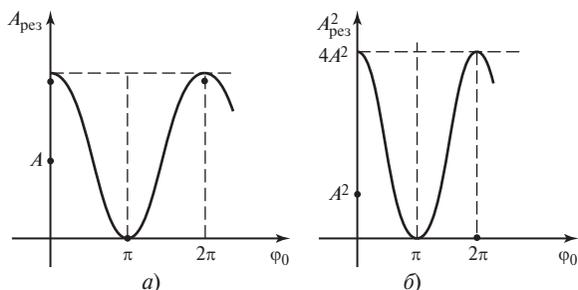


Рис. 27.3

27.2. Интерференция

Интерференцией называют явление наложения нескольких когерентных волн, в результате которого электромагнитные колебания в одних точках усиливаются, а в других точках ослабляются. Картина чередования светлых и темных участков на некоторой поверхности называется **интерференционной**. Интерференционная картина может быть расположена как в районе самой системы, создающей когерентные волны, так и удалена от этой системы очень далеко.

Что необходимо для наблюдения интерференции? Ответ прост: два независимых источника когерентных волн. Однако в природе таких источников не существует. Более того, излучение каждого источника представляет собой огромное число несогласованных актов: каждый возбужденный атом, переходя в состояние с меньшей энергией, излучает за время $\Delta t \approx 10^{-8}$ с так называемый *волновой цуг* (группу элементарных волн) пространственной протяженностью около 3 м. В дальнейшем излученный атомом волновой цуг получил название **светового кванта** — **фотона**. Два фотона, излученные атомами-соседями в принципе не являются когерентными.

Идея интерференции, принадлежащая Френелю, заключена в следующем: с помощью той или иной схемы «разделить» каждый волновой цуг на две (может быть, неравные) «половинки» и затем предоставить им возможность встречи на экране. Таких схем существует несколько: схема Юнга, бизеркала и бипризма Френеля, схема Ньютона, стеклянная пластинка и клин. О них речь пойдет дальше.

Перейдем к расчету интерференционной картины от двух когерентных источников — светящихся нитей S_1 и S_2 (рис. 27.4). В точку

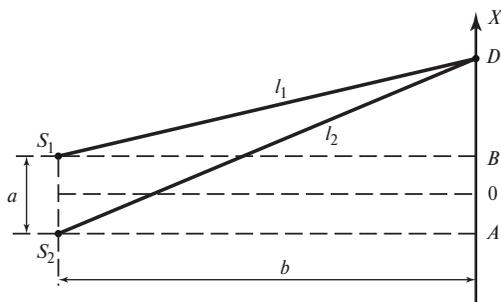


Рис. 27.4

экрана с координатой x приходят две когерентные волны, поэтому результирующее колебание определяется выражением

$$E_{\text{рез}} = A \cos(\omega t - kl_1) + A \cos(\omega t - kl_2).$$

Чтобы воспользоваться результатом предыдущих рассуждений, введем обозначение

$$\delta = |l_1 - l_2|,$$

где величину δ назовем *геометрической разностью хода* интерферирующих волн. В этом случае разность фаз колебаний в точке x

$$\varphi_0 = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta,$$

а координаты точек максимумов и минимумов интерференционной картины на экране дадут условия $\varphi_0 = 2\pi n$ (максимумы) и $\varphi_0 = \pi(2n - 1)$ (минимумы). Запишем для треугольников S_1DB и S_2AD на рис. 27.4 теорему Пифагора:

$$l_1^2 = (x - a/2)^2 + b^2;$$

$$l_2^2 = (x + a/2)^2 + b^2.$$

С учетом условий проведения опыта ($b \gg a \gg x$), почленное вычитание равенств даст формулу:

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = \delta 2b = 2ax.$$

Следовательно, $\delta = ax/b$. Подставляя δ в условия интерференционных максимумов и минимумов, получаем:

$$\text{максимумы: } \delta = n\lambda \text{ и } x_n = \frac{b\lambda}{a} n, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{минимумы: } \delta = (n + 1/2)\lambda \text{ и } x_n = \frac{b\lambda}{a} (n + 1/2), \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь мы указали как условия образования интерференционных максимумов и минимумов, так и координаты светлых и темных полос на экране.

Как известно, показатель преломления прозрачной среды равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в этой среде: $n = c_0/c$. Это обстоятельство приводит к тому, что волна движется в среде *медленнее*, чем в вакууме, и между интерферирующими волнами возникает дополнительное запаздывание, связанное с этим явлением. *Оптической длиной* $S_{\text{опт}}$ называют произведение длины пути луча на показатель преломления среды (рис. 27.5): $S_{\text{опт}} = nS$.

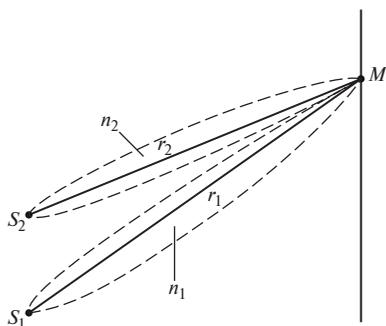


Рис. 27.5

С учетом этого условия интерференционных максимумов и минимумов приобретают вид:

максимумы: $\delta_{\text{опт}} = n\lambda$, где $n = 0, 1, 2, \dots$;

минимумы: $\delta_{\text{опт}} = (n + 1/2)\lambda$, где $n = 0, 1, 2, \dots$,

здесь $\delta_{\text{опт}}$ — оптическая разность хода волн, равная $\delta_{\text{опт}} = |S_{\text{опт}2} - S_{\text{опт}1}|$.

Важную роль в рассмотрении явления интерференции играет так называемая «*потеря полуволны*» при отражении света от границы двух прозрачных сред. Если свет падает из среды с меньшим показателем преломления n_1 на границу среды с бóльшим показателем преломления n_2 , то отраженный луч мгновенно изменяет фазу на π , что эквивалентно дополнительному оптическому пути, равному половине длины волны. Среду с бóльшим показателем преломления называют оптически более плотной. Поясним сказанное рис. 27.6,

a — $в$. Вектор Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ направлен в сторону переноса

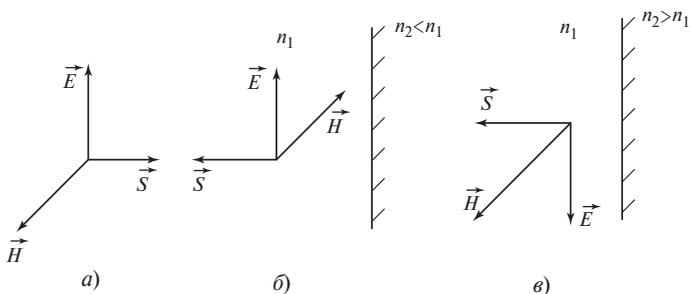


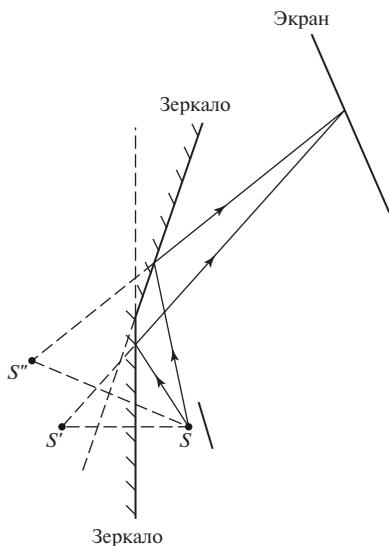
Рис. 27.6

волновой энергии. Поскольку направление этого вектора в падающей и отраженной волнах противоположны, из свойства векторного произведения следует, что один из векторов-сомножителей \vec{E} , \vec{H} при отражении должен изменить направление на противоположное. Оказывается, что при отражении от оптически более плотной среды изменяет направление на противоположное вектор \vec{E} , а в противном случае происходит изменение направления вектора \vec{H} . Физиологически человеческий глаз устроен так, что видимый им свет связан с напряженностью \vec{E} электромагнитного поля волны. Дальше в конкретных интерференционных схемах с явлением «потери полуволны» мы еще встретимся.

Каждая интерференционная схема, образно говоря, раздваивает излучение на два когерентных пучка, идущих от двух мнимых, но когерентных источников волн. Приведем несколько примеров интерференционных схем.

1. Два зеркала, образующих угол, близкий к 180° (рис. 27.7), называются **бизеркалами Френеля**. Интерферирующие лучи, отраженные от зеркал, когерентны. Все происходит так, будто есть два источника когерентных волн, расположенных симметрично источнику S относительно зеркал (мнимые источники S' и S'').

2. Сделанная из одной заготовки стекла **бипризма Френеля** (рис. 27.8) имеет очень маленькие преломляющие углы θ . Призмы



← Рис. 27.7

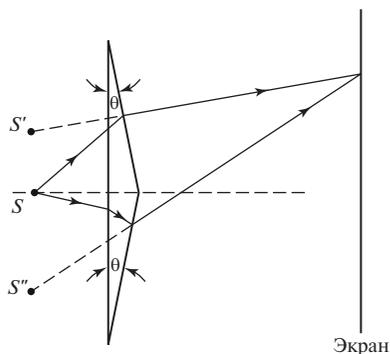


Рис. 27.8

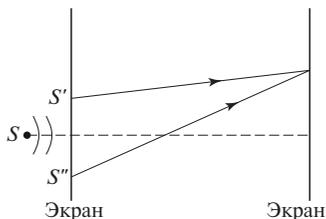


Рис. 27.9

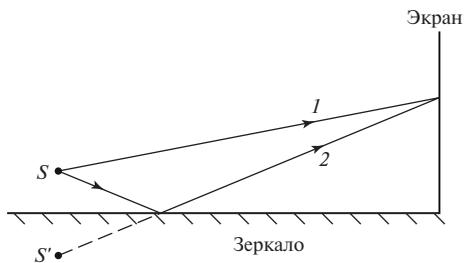


Рис. 27.10

преобразуют лучи от источника S так, что на экран приходят когерентные излучения, будто бы посланные когерентными источниками S' и S'' .

3. В *схеме Юнга* (рис. 27.9) источник света (длинная нить S) посылает излучение на экран, в котором есть две длинные узкие щели. Эти щели S' и S'' можно рассматривать как два самостоятельных источника когерентных волн.

4. *Схема Ллойда* (рис. 27.10) позволяет наблюдать интерференцию лучей, попавших от источника S на экран напрямую, с лучами, отраженными от зеркала и пришедшими на экран. Отметим «потерю полуволны» лучом 2. Именно поэтому граница экрана с зеркалом будет темной — на ней расположен интерференционный минимум.

27.3. Полосы равной толщины

Рассмотрим стеклянный клин с углом при вершине φ , на поверхность которого нормально падает монохроматическая электромагнитная волна, длина которой равна λ . Угол клина φ для наблюдения интерференции необходимо взять очень малым (длина волны видимого света лежит в пределах от 0,4 до 0,8 мкм), в противном случае полосы на поверхности клина будут малоразличимы. Обратимся к рис. 27.11. Оптическая разность хода лучей 1 (отраженного от

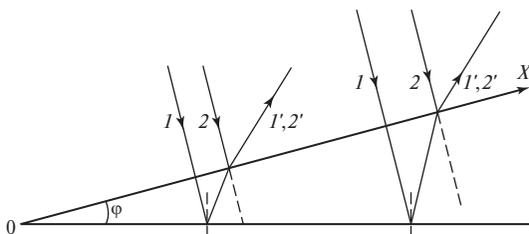


Рис. 27.11

нижней поверхности клина) и 2 (отраженного от верхней грани клина) будет равна:

$$\delta_{\text{опт}} = 2x\varphi - \lambda / 2.$$

Здесь мы учли «потерю полуволны» лучом 2 при отражении от стекла. Следовательно, условия максимумов и минимумов приобретут вид

максимумы: $\delta_{\text{опт}} = n\lambda$ и $x_n = (n + 1/2) \frac{\lambda}{2\varphi}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$;

минимумы: $\delta_{\text{опт}} = (n - 1/2)\lambda$ и $x_n = \frac{n\lambda}{2\varphi}$, где $n = 1, 2, \dots$

Из этих формул следует, что интерференционная картина расположена практически на верхней поверхности клина, а сам угол клина (точка с координатой $x = 0$) в отраженном свете будет казаться темным. Наблюдаемые на поверхности клина интерференционные полосы называются *полосами равной толщины*.

Ход лучей в опыте «*кольца Ньютона*» показан на рис. 27.12. Монохроматический свет падает на плоскую поверхность линзы радиусом R вертикально вниз, а интерференционная картина (чередование темных и светлых колец), расположенная практически на нижней поверхности линзы, наблюдается в отраженном свете с помощью микроскопа.

Определим разность хода интерферирующих лучей — луча 1, отраженного от стеклянной пластинки, и луча 2, отраженного от границы стеклянной сферы с воздухом, в точке их встречи. Оптическая разность хода этих лучей

$$\delta_{\text{опт}} = 2d - \lambda / 2.$$

Применяя теорему Пифагора

$$R^2 = (R - d)^2 + r^2,$$

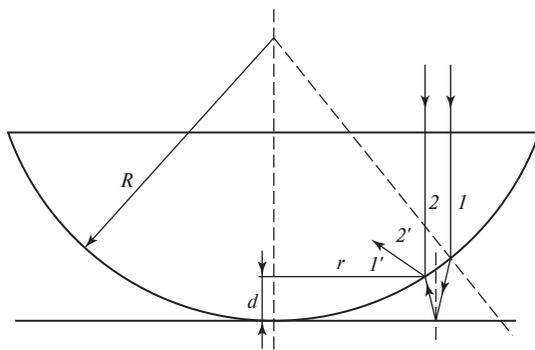


Рис. 27.12

получаем (пренебрегая малым слагаемым d^2) выражение

$$r^2 = 2Rd.$$

Тогда оптическая разность хода лучей

$$\delta_{\text{опт}} = \frac{r^2}{R} - \frac{\lambda}{2}.$$

Использование условий интерференционных максимумов и минимумов дает формулы для радиусов светлых и темных колец Ньютона в виде:

светлые кольца

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{2}} (2m - 1), \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots;$$

темные кольца

$$r_n = \sqrt{R\lambda n}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, расположенная практически на сферической поверхности линзы система полос равной толщины представляет собой набор концентрических темных и светлых колец, причем центр картины оказывается темным, что обусловлено «потерей полуволны» лучом I .

27.4. Полосы равного наклона

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну длиной λ , падающую на прозрачную *стеклянную пластинку* толщиной d под углом i (рис. 27.13). Показатель преломления стекла равен n . Часть волны отразится от границы воздух-стекло; показатель преломления воздуха практически равен единице. Выделим в двух отраженных пучках по одному лучу (лучи $1'$ и $2'$) и определим оптическую разность хода между ними. Обозначим длины сторон треугольников ADC и ABC следующим образом: длину стороны AD как l_1 и длину стороны AB как l_2 .

При расчете оптической разности хода лучей $1'$ и $2'$ необходимо учесть «потерю полуволны» лучом I при отражении от оптически более плотной среды (стекла) и то обстоятельство, что луч 2 проходит расстояние, равное $2l_2$ в оптической среде — стекле — с показателем преломления n . Тогда оптическую разность хода лучей $1'$ и $2'$ можно записать в виде

$$\delta_{\text{опт}} = 2nl_2 - l_1 - \lambda/2.$$

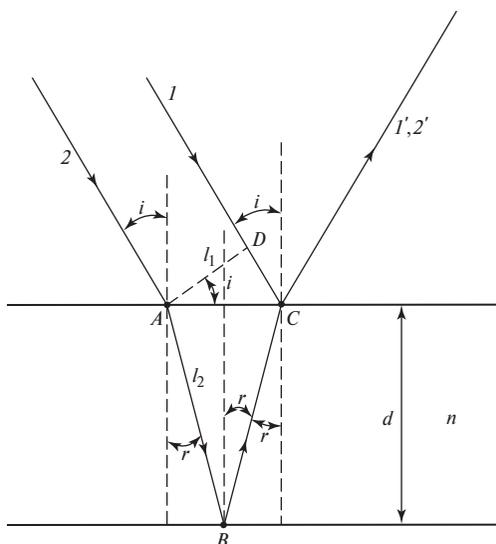


Рис. 27.13

Закон преломления света дает соотношение

$$\sin i / \sin r = n.$$

Соотношение сторон прямоугольного треугольника ADC и равнобедренного треугольника ABC имеет вид:

$$l_2 = d / \cos r;$$

$$l_1 = 2d \operatorname{tg} r \sin i.$$

Из этих формул после алгебраических преобразований получаем формулу для оптической разности хода лучей I' и $2'$:

$$\delta_{\text{опт}} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \lambda/2.$$

Используя условия интерференционных максимумов и минимумов, получаем формулы для углов падения волн, при которых в отраженном свете пластинка будет казаться светлой (максимумы) или темной (минимумы):

$$\text{максимумы: } 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_m} = \lambda(m + 1/2), \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{минимумы: } 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_m} = m\lambda, \quad \text{где } m = 1, 2, 3, \dots$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда на прозрачную пластинку падает под различными углами i множество монохроматических световых пучков (рис. 27.14). В этом случае в отраженном свете интер-

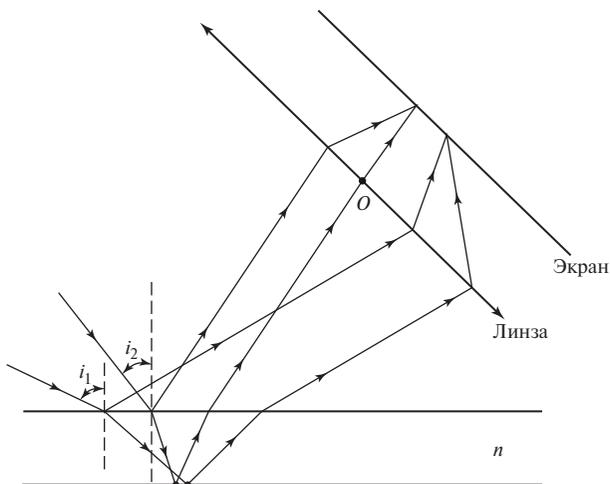


Рис. 27.14

ференционную картину можно наблюдать, поставив на пути отраженных лучей тонкую линзу. Такие линзы — *таутохронны* (они не вносят дополнительной разности хода для параллельных лучей, падающих на линзу). Кроме того, линза собирает параллельные лучи в своей фокальной плоскости. Если в этой плоскости поместить экран, то именно на нем можно наблюдать чередование темных и светлых полос. Такая интерференционная картина получила название *полос равного наклона*.

27.5. Дифракция света

Дифракцией называется совокупность явлений, связанных с распространением света в среде с резкими неоднородностями (*препятствиями*). Если свет в такой среде встречает препятствие, то он отклоняется от прямолинейного распространения и *проникает* в область геометрической тени. При выполнении определенных условий можно наблюдать явление дифракции в виде *дифракционной* (интерференционной) *картины*. Эта картина представляет собой для монохроматического света систему чередующихся в зависимости от формы препятствия светлых и темных колец или систему светлых и темных параллельных полос. Под препятствиями понимаются прозрачные (в виде отверстий) и непрозрачные (в виде преград) образования малых линейных размеров.

Между дифракцией и интерференцией нет существенного физического различия. Оба явления заключаются в перераспределении

энергии в результате суперпозиции волн. Перераспределение энергии, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, принято называть интерференцией волн. Перераспределение энергии, возникающее вследствие суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенными непрерывно, принято называть дифракцией волн.

Формально возникновение дифракции можно объяснить с помощью **принципа Гюйгенса** (Х. Гюйгенс (1629—1695)): *всякая точка среды, до которой доходит волновое возмущение, становится источником вторичных сферических волн* (рис. 27.15). Огибающая всех этих сферических волн дает фронт волны в каждый данный момент времени. Нормали к фронту волны (световые лучи) показывают направление распространения световой волны.

На рис. 27.15 показано, как световая волна, падая на отверстие в экране, проникает в область геометрической тени, нарушая закон прямолинейного распространения.

Принцип Гюйгенса в его первоначальном виде позволял находить только положения волновых фронтов в последующие моменты времени, т.е. определять направление распространения волны, и ничего не говорил об интенсивности света, распространяющегося в различных направлениях. Гипотезу Гюйгенса об огибающей вторичных волн О. Френель (1788—1827) дополнил идеей интерференции, согласно которой *волны от вторичных источников интерферируют, распространяясь вперед*. Этот «усовершенствованный» принцип получил название **принципа Гюйгенса — Френеля**.

Пусть поверхность F является волновой поверхностью света, распространяющегося от некоторого точечного источника (рис. 27.16).

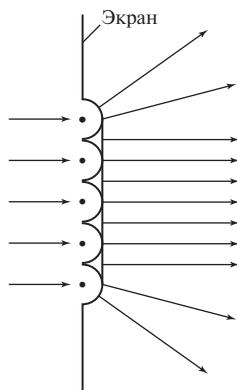


Рис. 27.15

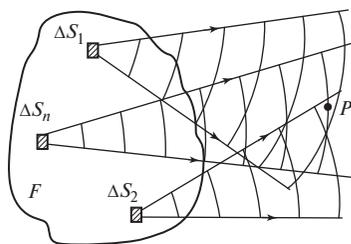


Рис. 27.16

Разобьем волновую поверхность на элементарные источники $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Эти источники будут когерентными, так как они порождаются одной и той же волной и представляют собой элементы разбиения данной волновой поверхности. Результирующее колебание в точке P есть результат интерференции всех вторичных волн, приходящих от этих источников в точку P с учетом их амплитуды и фазы. При этом стоит учитывать те элементы волновой поверхности, которые не загораживаются каким-либо препятствием.

Способы разбиения волновой поверхности на элементарные источники зависят от характера задачи. О. Френель предложил оригинальный метод разбиения волновой поверхности на зоны (**зоны Френеля**).

Рассмотрим следующий пример. Поместим точечный монохроматический источник света S в фокус слева от собирающей линзы L (рис. 27.17). Справа от линзы образуется плоская монохроматическая световая волна. Выделим на ней произвольную плоскую волновую поверхность F и разобьем волновую поверхность на элементарные источники — зоны Френеля. Для этого с центром в точке наблюдения P , лежащей на оси симметрии, проведем ряд концентрических сфер. Первая сфера с наименьшим радиусом L , равным расстоянию от точки P до волновой поверхности, должна коснуться этой поверхности. Все остальные пересекают волновую поверхность, при этом радиус каждой последующей сферы должен отличаться от радиуса предыдущей на половину длины волны $\lambda/2$. Со стороны точки наблюдения P границы зон на волновой поверхности представляют собой линии пересечения сфер и волновой поверхности в виде концентрических окружностей (рис. 27.18). Поэтому все зоны, за исключением первой — круга, являются кольцами. На рис. 27.18 ρ_1, ρ_2, ρ_3 являются радиусами соответствующих зон Френеля, а R — радиусом

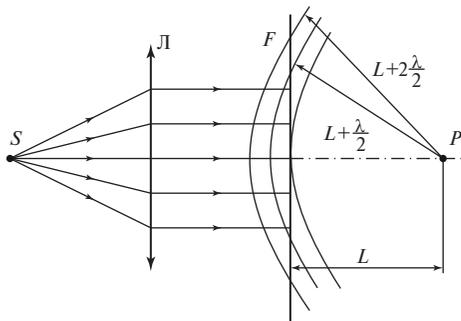


Рис. 27.17

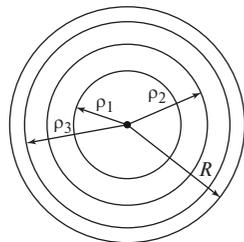


Рис. 27.18

отверстия (понятие радиус вводится тогда, когда на пути параллельного пучка лучей — плоской волны, полученной с помощью собирающей линзы, ставится непрозрачный плоский экран с круглым отверстием радиусом R . Правда, этот пример не предполагает наличия экрана).

С помощью рис. 27.19 определим радиусы границ зон Френеля (расчет аналогичен вычислению радиусов колец Ньютона). Радиус m -го кольца ρ_m находится из соотношения

$$\rho_m^2 = \left(L + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - L^2 = L^2 + Lm\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} - L^2, \quad (27.1)$$

где λ — длина световой волны. Или (с учетом, что $\lambda \ll L$):

$$\rho_m = \sqrt{mL\lambda}. \quad (27.2)$$

При наличии экрана с отверстием радиусом R радиус последней зоны Френеля, укладывающейся на отверстие, равен радиусу отверстия. Откуда следует, что радиусы некоторых зон Френеля могут быть представлены следующим образом

$$\rho_1 = \sqrt{L\lambda}; \quad \rho_2 = \sqrt{2L\lambda}; \quad \rho_m = \sqrt{mL\lambda}; \quad \rho_{m-1} = \sqrt{(m-1)L\lambda}.$$

Легко показать, что площади всех зон одинаковы. Действительно,

$$S_m = \pi\rho_m^2 - \pi\rho_{m-1}^2 = \pi\lambda L.$$

В это выражение не входит номер зоны, поэтому $S_1 = S_2 = \dots = S_m$.

Одинаковые по площади зоны должны были бы возбуждать в точке наблюдения P колебания с одинаковой амплитудой (см. рис. 27.19). Однако расстояние от каждой последующей зоны Френеля с большим номером до точки наблюдения возрастает.

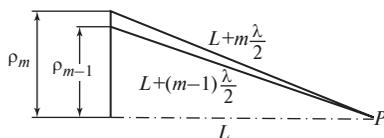


Рис. 27.19

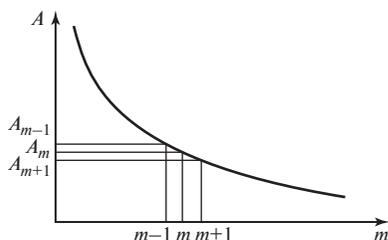


Рис. 27.20

О. Френель, высказывал предположение (подтвержденное опытом), что амплитуда колебаний, приходящих в точку наблюдения от все более удаленных зон, *уменьшается*, хотя и незначительно:

$$A_1 > A_2 > A_3 \dots > A_m,$$

где A_m — амплитуда колебаний, вызванных m -й зоной. Это означает, что с увеличением номера зоны m наблюдается монотонный спад амплитуд колебаний, приходящих в точку P . Зависимость $A = f(m)$ можно изобразить в виде графика, представленного на рис. 27.20.

С хорошим приближением можно считать, что амплитуда колебаний, вызываемых некоторой зоной, равна среднему арифметическому из амплитуд колебаний, вызываемых двумя соседними зонами, т.е.

$$A_m = (A_{m-1} + A_{m+1})/2.$$

Так как расстояния от двух соседних зон до точки наблюдения отличаются на $\lambda/2$, то возбуждаемые этими зонами колебания приходят в эту точку в противофазе. Поэтому волны от любых двух соседних зон почти гасят одна другую. Суммарная амплитуда в точке наблюдения при отсутствии какой либо преграды на пути лучей:

$$\begin{aligned} A &= A_0 = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \\ &= \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2}. \end{aligned} \quad (27.3)$$

(Из закона монотонного спада амплитуд следует, что слагаемые, стоящие в скобках, обращаются в нуль.) Таким образом, вся волновая поверхность оказывает в точке наблюдения действие, практически равное половине действия первой зоны Френеля.

Если изготовить плоский непрозрачный экран, который оставлял бы открытыми только несколько нечетных (или только четных) зон, то амплитуда колебаний резко возрастает. Если отверстие в непрозрачном экране оставляет открытой только первую зону Френеля, то амплитуда колебаний в точке наблюдения возрастает в 2 раза (а интенсивность в 4 раза) по сравнению с действием невозмущенной волны I_0 . Если открыты первая, третья и пятая зоны, то $A = 6A_0$, $I = 36 I_0$.

Такие пластинки, закрывающие отдельные зоны Френеля и обладающие свойством фокусировать свет, называются **зонными пластинками**.

Оценим размеры зон Френеля. Пусть на пути плоской монохроматической волны находится препятствие в виде круглого отверстия; а дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на

расстоянии $L = 1$ м от отверстия. Длина волны $\lambda = 600$ нм (красный свет). Тогда радиус первой зоны Френеля

$$\rho_1 = \sqrt{L\lambda} \approx 0,77 \text{ мм.}$$

Таким образом, в оптическом диапазоне вследствие малости длины волны размер зон Френеля оказывается достаточно малым. Дифракционные явления при описанной постановке эксперимента проявляются наиболее отчетливо, когда на препятствии укладываются лишь небольшое число зон:

$$m = \frac{R^2}{L\lambda} \geq 1, \text{ или } R^2 \geq L\lambda, \quad (27.4)$$

где R — радиус отверстия. Если же формальный расчет по формуле (27.4) дает $m \ll 1$, дифракционные явления также наблюдаются.

Число m в (27.4) можно рассматривать, как **критерий наблюдения дифракции**. Обычно различают два вида дифракции. Если расчет по формуле (27.4) дает $m \geq 1$ говорят о дифракции в сходящихся лучах, или дифракции Френеля. Если $m \ll 1$, то говорят о дифракции в параллельных лучах, или дифракции Фраунгофера.

Если число зон Френеля, укладываемых на препятствии, становится очень большим, то дифракционные явления практически незаметны:

$$m = \frac{R^2}{L\lambda} \gg 1, \text{ или } R^2 \gg L\lambda.$$

Это неравенство определяет границу применимости геометрической оптики. Узкий пучок света, который в геометрической оптике называется лучом, может быть сформирован только при этом условии. На экране в этом случае наблюдается четкая граница тени, а яркость области света не зависит от размеров препятствия (см. (27.3)). Таким образом, геометрическая оптика является предельным случаем волновой.

27.6. Дифракция Френеля

Дифракцию Френеля рассмотрим для сферических волн. Частный случай плоских волн получается, если расстояние до источника стремится к бесконечности. Сферическая волна получается, если точечный источник света находится на конечном расстоянии от препятствия (круглого отверстия), следовательно, на самом препятствии волновая поверхность представляет собой часть сферической поверхности. В отличие от рассмотренного ранее случая дифракции от удаленного источника геометрия задачи усложняется, так как зоны

Френеля теперь нужно строить не на плоской, а на сферической поверхности (рис. 27.21).

Расчет приводит к следующему выражению для радиуса m -й зоны Френеля (см. далее пример 27.1):

$$\rho_m = \sqrt{m \frac{ab}{a+b} \lambda}. \quad (27.5)$$

Все выводы изложенной выше теории Френеля остаются справедливыми и в этом случае.

Мы ограничимся рассмотрением двух случаев дифракции сферических волн: дифракции от круглого отверстия и дифракции от круглого диска.

а) Пусть отверстие для данной точки наблюдения открывает небольшое нечетное число зон Френеля, например три зоны (рис. 27.22).

б) Пусть отверстие для данной точки наблюдения открывает небольшое четное число зон Френеля, например, две зоны (рис. 27.23).

Точка наблюдения P находится на перпендикуляре к плоскости отверстия в его центре. Отверстие вырезает на волновой поверхности сегмент.

Для трех зон результирующая амплитуда колебания в точке P

$$\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3;$$

$$A_{\text{рез}} = A_1 - A_2 + A_3 = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \frac{A_3}{2} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2} > \frac{A_1}{2}.$$

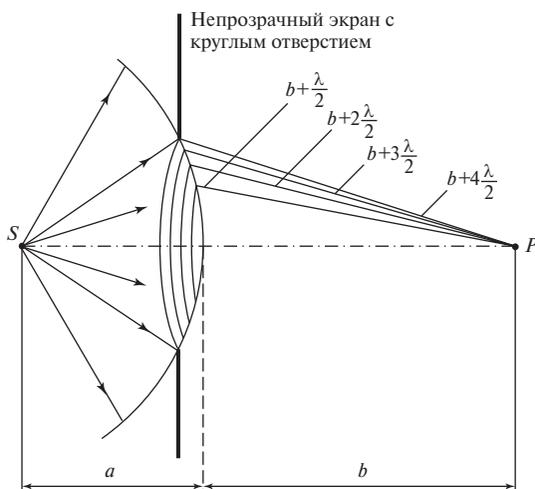


Рис. 27.21

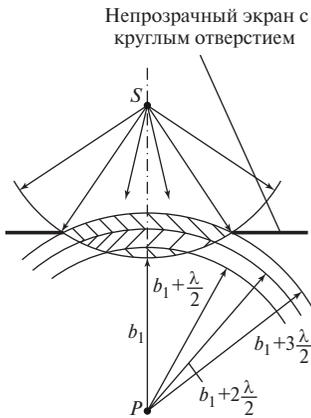


Рис. 27. 22

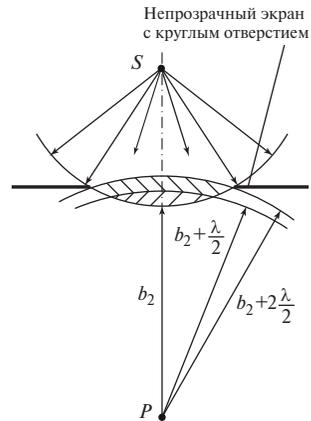


Рис. 27. 23

Это значит, что в точке P наблюдается максимум дифракционной картины — пятно получается светлым. Причем яркость этого пятна будет большей, чем в том случае, если бы препятствия не было вообще.

Для двух зон результирующая амплитуда колебаний в точке P

$$\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2;$$

$$A_{\text{рез}} = A_1 - A_2 = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 \right) = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} < \frac{A_1}{2},$$

$(A_1/2 - A_2)$ можно заменить на $-A_2/2$, так как амплитуды от двух соседних зон практически одинаковы

В точке P наблюдается минимум дифракционной картины — пятно получается темным. В минимуме дифракционной картины яркость пятна получается меньшей, чем в том случае, если бы препятствие отсутствовало.

Таким образом, при перемещении вдоль перпендикуляра к плоскости отверстия глаз наблюдателя будет видеть чередование светлых и темных пятен. Причем освещенность этих пятен будет уменьшаться по мере приближения к отверстию. Так как чем ближе точка наблюдения находится к отверстию, тем больше для данной точки P вырезается зон Френеля этим отверстием и тем меньше освещенность (яркость) в этой точке будет отличаться от той, которая была бы, если бы препятствия не было вообще (а это и есть случай геометрической оптики).

На экране, параллельном плоскости отверстия и проходящем через точку P , будет наблюдаться дифракционная картина в виде чередующихся светлых и темных концентрических колец с темным

(m четное) или светлым (m нечетное) пятном в центре в зависимости от удаленности экрана от отверстия. Если отверстие открывает большое число зон Френеля, чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в очень узкой области на границе геометрической тени; внутри этой области освещенность оказывается практически постоянной, не зависящей от размеров отверстия и расстояния до него, что соответствует приближению геометрической оптики.

Предположим, что точка наблюдения P выбрана таким образом, что диск для нее закрывает на волновой поверхности одну зону Френеля (рис. 27.24). В этом случае результирующая амплитуда колебаний в точке P будет определяться половиной амплитуды колебаний первой открытой зоны. А первой открытой зоной является вторая. Поэтому в точке P наблюдается максимум дифракции с амплитудой $A_{\text{рез}} = A_2/2$. Если диском закрыты две зоны Френеля, то по аналогии с предшествующим $A_{\text{рез}} = A_3/2$, и в точке P вновь наблюдается максимум дифракции.

Таким образом, независимо от того, четное или нечетное число зон Френеля закрывается диском, на нормали к центру диска всегда будет присутствовать максимум дифракционной картины (светлое пятно). Оно носит название *пятна Пуассона* (С. Пуассон (1781—1840)). Интенсивность максимума убывает по мере приближения к диску, что условно показано на рис. 27.25 в виде уменьшающихся по размеру точек.

Вблизи диска на нормали образуется темное пятно. Это вызвано тем, что для близких к непрозрачному круглому диску точек P диск закрывает большое число зон Френеля. Тогда первой открытой явля-

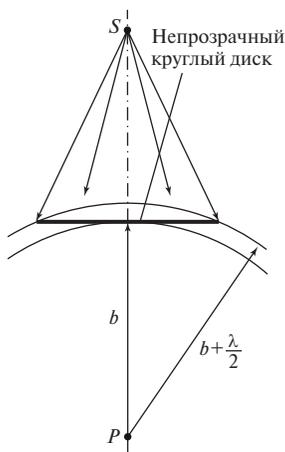


Рис. 27.24

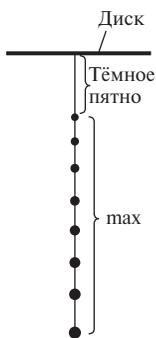


Рис. 27.25

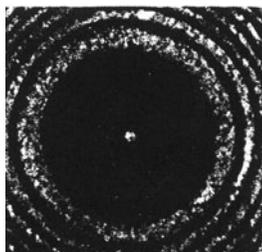


Рис. 27.26

ется дальняя (с большим номером m) зона Френеля, а она посылает свет в точки наблюдения очень малой интенсивности, и все эти точки видятся темными.

На экране, расположенном перпендикулярно диску на достаточном удалении от него наблюдается картина, представленная на рис. 27.26. В центре этой картины наблюдается пятно Пуассона.

Пример 27.1. Точечный источник света S с длиной волны $\lambda = 500$ нм расположен на расстоянии $a = 1$ м перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом $R = 1$ мм. Найдите расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения P , для которой отверстие вырезает на волновой поверхности $m = 3$ зоны Френеля. Докажите, что площади всех зон Френеля одинаковы.

На рис. 27.27, *a* представлено отверстие в диафрагме, на которое падает свет от точечного источника S . Радиус отверстия R равен радиусу ρ_m последней, m -й зоны Френеля, укладываемой на отверстии. Точка наблюдения P находится справа от отверстия на расстоянии b . Рисунок 27.27, *б* демонстрирует результат разбиения волновой поверхности AOB в пределах отверстия на три зоны Френеля с помощью вспомогательных сфер с радиусами, различающимися на $\lambda/2$. Рассмотрим ΔSAC и ΔCAP на рис. 27.27, *a*. Из ΔSAC имеем:

$$\rho_m^2 = a^2 - (a - h)^2. \quad (27.6)$$

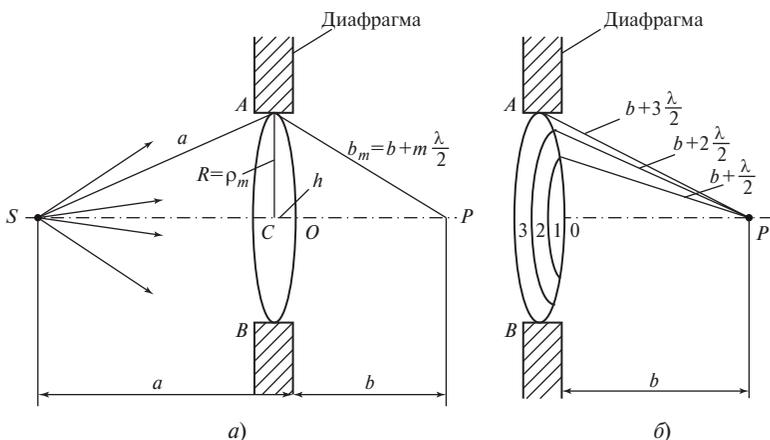


Рис. 27.27

Из ΔCAP следует, что

$$\rho_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h)^2. \quad (27.7)$$

Из уравнений (27.7), (27.6) следует:

$$a^2 - (a - h)^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h)^2. \quad (27.8)$$

Раскроем скобки и приведем уравнение (27.8) к виду

$$h = \frac{bm\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a + b)}.$$

Поскольку длина волны λ мала, то слагаемое $(m\lambda/2)^2$ является величиной второго порядка малости и им можно пренебречь. В результате

$$h = \frac{mb\lambda}{2(a + b)}. \quad (27.9)$$

Преобразуем уравнение (27.6) к виду

$$\rho_m^2 = 2ah - h^2.$$

Пренебрежем членом h^2 в силу малости значения h , получим

$$\rho_m^2 = 2ah,$$

или с учетом (27.9) имеем:

$$\rho_m^2 = \frac{mba\lambda}{a + b}. \quad (27.10)$$

Отсюда

$$b = \frac{a\rho_m^2}{am\lambda - \rho_m^2} = \frac{aR^2}{am\lambda - R^2} \approx 2 \text{ м.}$$

Как следует из уравнения (27.10) радиус m -й зоны

$$\rho_m = \sqrt{\frac{mba\lambda}{a + b}},$$

радиус $(m - 1)$ -й зоны

$$\rho_{m-1} = \sqrt{\frac{(m-1)ba\lambda}{a + b}}.$$

Соответственно площади m -й и $(m - 1)$ -й зон запишутся в виде

$$S_m = \pi\rho_m^2 - \pi\rho_{m-1}^2 = \pi \frac{ba\lambda}{a + b}; \quad S_{m-1} = \pi\rho_{m-1}^2 - \pi\rho_{m-2}^2 = \pi \frac{ba\lambda}{a + b}.$$

Как видно из полученных выражений для S_m и S_{m-1} , площадь m -й зоны равна площади $(m-1)$ -й. Это означает, что площади всех зон Френеля одинаковы $S_1 = S_2 = \dots = S_m$, так как в выражение для S не входит номер зоны.

Пример 27.2. Между точечным источником света и экраном помещают диафрагму с круглым отверстием, радиус которого R можно менять в процессе опыта (рис. 27.27). Расстояния от диафрагмы до источника и экрана соответственно $a = 100$ см и $b = 125$ см. Определите длину световой волны, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $R_1 = 1,00$ мм, а следующий максимум при $R_2 = 1,29$ мм.

Как следует из условия задачи, в центре картины должен наблюдаться максимум освещенности. Это происходит в том случае, если отверстие на волновой поверхности вырезает нечетное число зон Френеля. Предположим, что на отверстии радиусом R_2 уложилось $(2m+1)$ зон Френеля, а на отверстии радиусом R_1 — $(2m-1)$ зон.

Тогда формулы для определения радиусов соответствующих зон можно записать в следующем виде (см. пример 27.1)

$$\rho_{2m+1} = R_2 = \sqrt{\frac{(2m+1)ba\lambda}{a+b}}; \quad (27.11)$$

$$\rho_{2m-1} = R_1 = \sqrt{\frac{(2m-1)ba\lambda}{a+b}}. \quad (27.12)$$

Возведем правые и левые части уравнений (27.11) и (27.12) в квадрат и вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$R_2^2 - R_1^2 = \frac{2ba\lambda}{a+b},$$

откуда

$$\lambda = \frac{(a+b)(R_2^2 - R_1^2)}{2ab} = 600 \text{ нм.}$$

27.7. Дифракция Фраунгофера

Дифракция Фраунгофера (дифракция в параллельных лучах) наблюдается на удаленном экране при падении плоских волн на небольшое препятствие (отверстие). В этом случае падающие на экран лучи можно считать почти параллельными. Вместо удаленного экрана можно использовать экран, расположенный в фокусе собирающей линзы: из дифрагирующих лучей линза «отберет» параллельные.

Принципиально дифракция плоских волн не отличается от дифракции сферических волн, но при дифракции плоских волн дифракционная картина получается более отчетливой. Поэтому дифракция плоских волн находит более широкое практическое применение. В связи с этим наибольший интерес представляет собой в качестве препятствия отверстие в виде длинной узкой прямоугольной щели $l \gg b$ (рис. 27.28), так как такая щель является элементом дифракционной решетки — основного дифракционного прибора.

Предположим, что на *прямоугольную щель* падает плоская волна. Рассмотрим световые лучи (рис. 27.29), которые дифрагируют на щели под углом φ . Эти лучи идут параллельно один другому и поэтому «пересекаются» в бесконечности. Как сказано выше, для разбиения щели на зоны Френеля (как и для круглого отверстия) нужно построить сферы. Центры таких сфер лежат бесконечно далеко от щели. Их радиусы бесконечно велики. По существу такие сферы являются плоскостями. И, следовательно, такими параллельными плоскостями, отстоящими одна от другой на $\lambda/2$, щель разбивается на зоны Френеля I, II, III, IV. Для данной точки наблюдения, лежащей в бесконечности, плоскости должны быть перпендикулярны дифрагирующим лучам, направленным именно в эту точку.

Ширина зоны Френеля зависит от угла дифракции. Чем больше угол дифракции, тем больше зон укладывается на щели и тем уже по ширине каждая из зон. Площади всех зон Френеля одинаковы.

Лучи, идущие от щели, собираются линзой Л на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы. На нем наблюдается дифракционная картина.

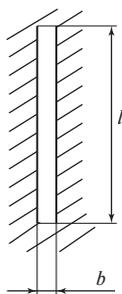


Рис. 27.28

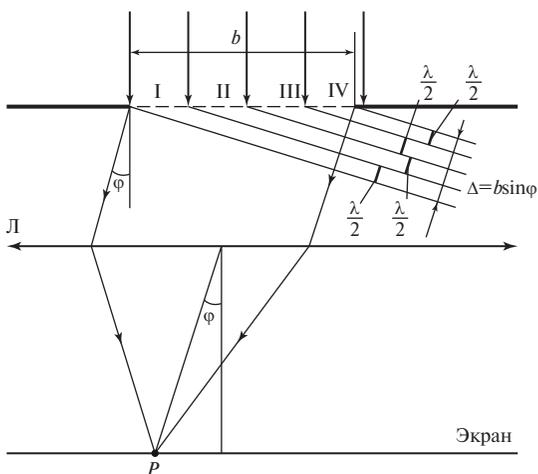


Рис. 27.29

При дифракции плоских волн амплитуды колебаний, посылаемых каждой отдельной зоной в данную точку на экране, будут одинаковы, так как эти зоны занимают совершенно одинаковое положение по отношению к углу дифракции.

Поэтому результат дифракции определяется формулой

$$\vec{A}_{\text{рез}} = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i.$$

Максимумы дифракции наблюдаются для таких направлений дифрагирующих лучей, для которых на данной щели укладывается нечетное число зон Френеля. Например, для трех зон

$$A_{\text{рез}} = A - A + A = A; \quad I = A^2.$$

Эта амплитуда в точке наблюдения почти в 2 раза больше, чем в случае дифракции на отверстии сферических волн ($A > A_1/2$).

Условие максимума:

$$\Delta = b \sin \varphi_{\text{max}} = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (27.13)$$

где $m = 1, 2, 3 \dots$

Если для данного угла дифракции на щели укладывается четное число зон Френеля, выполняется условие минимума:

$$\Delta = b \sin \varphi_{\text{max}} = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (27.14)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ При этом результирующая амплитуда (для двух зон)

$$A_{\text{рез}} = A - A = 0; \quad I = 0.$$

Итак:

1) при дифракции плоских и сферических волн максимум дифракции в данной точке наблюдения присутствует тогда, когда для данной точки наблюдения отверстие вырезает на волновой поверхности световой волны нечетное число зон Френеля. Если отверстие вырезает четное число зон, в точке P наблюдается минимум;

2) при дифракции плоских волн дифракционная картина (рис. 27.30) получается более отчетливой, чем при дифракции сферических волн. Действительно, в местах расположения минимумов наблюдается не просто ослабление интенсивности, а волны полностью гасят одна другую, и результирующая интенсивность равна нулю. В местах расположения максимумов интенсивность получается большей, чем при дифракции сферических волн.

Проведем анализ полученных результатов для одной щели.

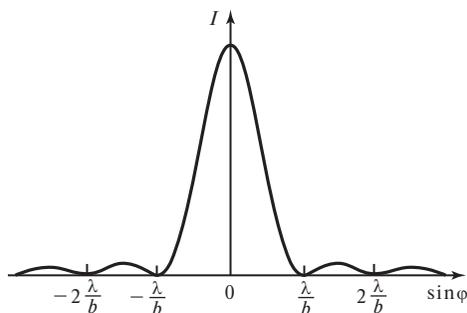


Рис. 27.30

1. На щель падает монохроматический свет.

Число максимумов и минимумов дифракционной картины при дифракции на щели ограничено условием

$$|\sin \varphi| \leq 1, \quad \text{т.е.} \quad \varphi_{\min} = k\lambda/b \leq 1.$$

Рассмотрим несколько частных случаев:

а) если ширина щели b много меньше длины волны λ света, то дифракционная картина в виде полос не наблюдается, а щель работает, как точечный источник света. Экран равномерно освещен светом этого источника;

б) если $b = \lambda$, то $\sin \varphi_{\min} = 1$, $k = 1$, $\varphi_{\min} = \pi/2$. Дифракционная картина в виде полос отсутствует. Интенсивность света монотонно спадает от центра экрана к его краям;

в) если, например, $b = 5\lambda$, то $\sin \varphi_{\min} = k/5$, где k принимает целочисленные значения, причем $|\sin \varphi| < 1$. Дифракционная картина есть. На ней отчетливо просматриваются несколько максимумов и минимумов (по обе стороны от центра экрана);

г) если $b = 100\lambda$, то $\sin \varphi_{\min} = k/100$. Теоретически в такой дифракционной картине присутствуют около 100 максимумов и 100 минимумов как по одну, так и по другую сторону от центра экрана. Угловое расстояние между соседними максимумами и минимумами столь мало, что соседние максимумы будут очень узкими и будут практически вплотную примыкать один к другому. Поэтому для получения более отчетливой дифракционной картины нужно, чтобы ширина щели значительно не превышала длину монохроматической световой волны.

Все сказанное при анализе полученных результатов справедливо с некоторым уточнением: для оценки характера дифракционной картины нужно знать не только отношение b/λ , но и расстояние L , на котором наблюдается дифракционная картина. Поэтому в случае с диф-

ракцией на щели, по аналогии с формулой (27.4), вводится отношение $b^2/(L\lambda)$. Оно приближенно равно числу открытых зон Френеля m для точки, лежащей против середины щели: $m = b^2/(L\lambda)$.

При небольших расстояниях экрана от щели (когда $m \gg 1$) картина подчиняется экранам геометрической оптики — на экране получается равномерно освещенное изображение щели.

Если щель открывает малую долю первой зоны Френеля ($m \ll 1$, что соответствует п. в) наблюдается дифракция Фраунгофера.

Если щель открывает небольшое число зон Френеля ($m \approx 1$, а каждое из отношений b/λ и L/b равно, например, 100, что соответствует п. г), на экране присутствует изображение щели. На краю изображения наблюдаются очень узкие чередующиеся светлые и темные полосы.

2. На щель падает белый свет.

В этом случае каждый максимум дифракционной картины кроме центрального представляет собой спектр, в котором ближе к центру всей картины наблюдаются цвета, соответствующие более коротким длинам волн видимого диапазона. На ближнем к центру краю максимума присутствует фиолетовый цвет, на дальнем — красный.

Пример 27.3. На круглое отверстие радиусом $R = 1$ мм в непрозрачной тонкой пластине падает нормально плоская световая волна ($\lambda = 500$ нм). На пути лучей, прошедших отверстие, помещают экран. Определите максимальное расстояние b от отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины (в точке P) еще будет наблюдаться темное пятно.

Результат дифракции для центра дифракционной картины (точки P) зависит от того, сколько зон Френеля для данной точки наблюдения P уложится на отверстии (рис. 27.31). Если число зон m нечетное, в точке P присутствует максимум, если число зон m четное — минимум. Чем дальше точка P находится от отверстия, тем больше радиус

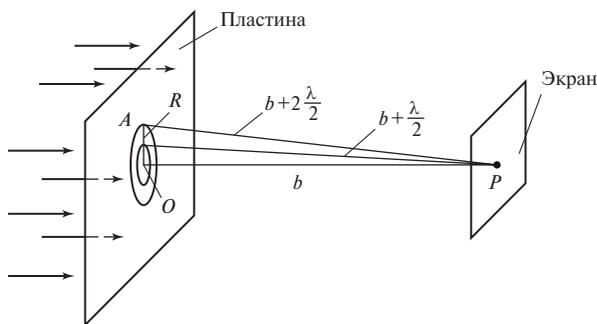


Рис. 27.31

вспомогательных сфер, разбивающих волновую поверхность в пределах отверстия на зоны Френеля, и тем меньше зон Френеля уложится на отверстию.

Условие задачи требует минимальности числа зон m и максимальной значения b для наблюдения минимума в точке P . Этому условию отвечает $m = 2$. Из $\triangle OAP$ имеем:

$$R^2 + b^2 = \left(b + 2 \frac{\lambda}{2}\right)^2.$$

Решая уравнение относительно b и полагая, что $\lambda^2 \approx 0$, получаем:

$$b = R^2/\lambda = 2 \text{ м.}$$

Пример 27.4. На круглое отверстие диаметром $d = 2R = 4$ мм в тонкой непрозрачной пластине падает нормально плоская световая волна ($\lambda = 500$ нм). Точка наблюдения P находится на оси отверстия на расстоянии $b = 1$ м от него. Сколько зон Френеля укладывается на отверстию. Что будет наблюдаться в центре дифракционной картины (в точке P) — максимум или минимум дифракции?

На рис. 27.32 представлены: кратчайшее расстояние b от отверстия до точки наблюдения P , радиус отверстия R (он же радиус самой последней m -й зоны, укладывающейся на волновой поверхности в пределах отверстия), и радиус $\left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)$ самой большой вспомогательной сферы, разбивающей отверстие (волновую поверхность) на зоны Френеля. Три отрезка прямых OP , OA и AP , которые представ-

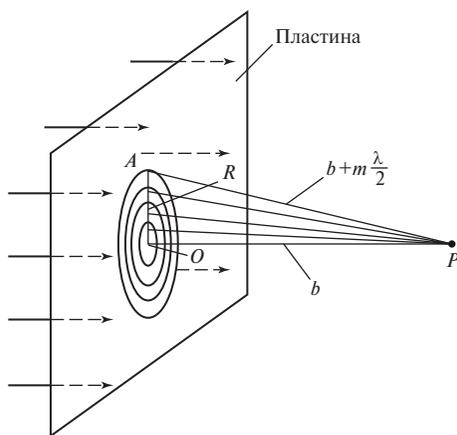


Рис. 27.32

ляют собой вышеперечисленные параметры, образуют $\triangle OAP$. Из него следует:

$$R^2 + b^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2, \quad (27.15)$$

Решение уравнения (27.15) (с учетом, что $\lambda^2 \approx 0$) приводит к результату

$$m = \frac{R^2}{b\lambda} = \frac{d^2}{4b\lambda} = 8.$$

Число зон m четное. Поэтому в центре дифракционной картины наблюдается минимум.

Пример 27.5. На щель шириной $b = 0,15$ мм падает нормально плоская волна ($\lambda = 450$ нм). С помощью линзы, оптическая сила которой $D = 5$ дптр, дифракционная картина проецируется на экран, находящийся в фокальной плоскости линзы. Определите ширину центрального максимума и угловое положение первого максимума. Какое число максимумов теоретически включает дифракционная картина и какое число из них можно наблюдать практически?

Из рис. 27.33, *a* видно, что дифрагирующие под углом φ лучи BD и EK параллельны один другому и побочной оси CA . Именно под этим углом φ в точке A наблюдается первый максимум, интенсивность которого равна I_1 . В общем случае положение максимума при дифракции на щели определяет формула (27.13)

$$b \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

где по условию задачи $m = 1$. Поэтому $\sin \varphi = \frac{3\lambda}{2b}$ (находим положение максимума по одну сторону от центрального максимума — максимума нулевого порядка, поэтому знак « \pm » в формуле (27.13) опускаем), или

$$\varphi = \arcsin \frac{3\lambda}{2b} = 0,26^\circ.$$

Полное число максимумов, которое теоретически можно получить из формулы (27.13) при условии, что $|\sin \varphi| = 1$:

$$m = \frac{b}{\lambda} - \frac{1}{2} \approx 333.$$

Но практически наблюдать их все невозможно, так как уже интенсивность третьего максимума составляет $8/1000$ интенсивности центрального максимума (рис. 27.33, *b*) $I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008$,

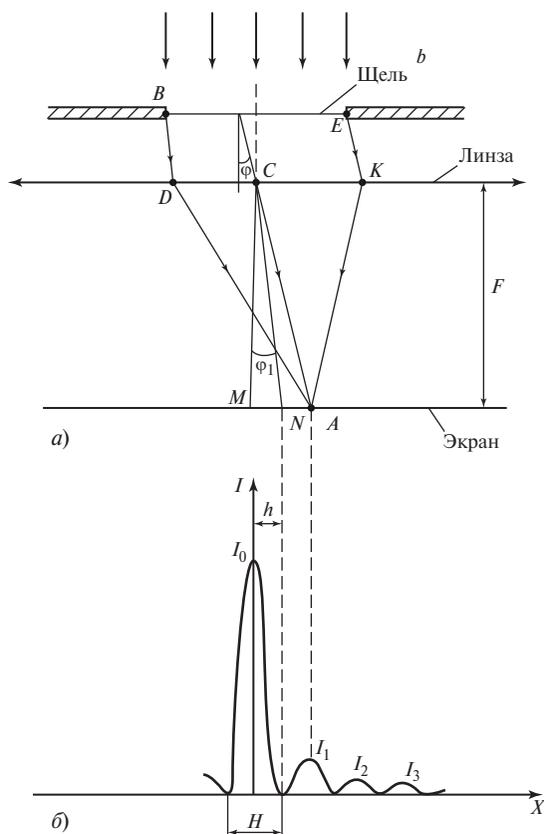


Рис. 27.33

где I_0, I_1, I_2, I_3 соответственно интенсивности центрального, первого, второго и третьего максимумов.

Для определения ширины центрального максимума H рассмотрим $\triangle MCN$ (рис. 27.33, а). Из треугольника получаем :

$$h = F \operatorname{tg} \varphi_1,$$

где F — фокусное расстояние собирающей линзы (предполагается, что линза вплотную располагается к щели, поэтому F является одновременно и расстоянием от щели до экрана, а угол φ_1 является углом, под которым наблюдается первый минимум).

В силу симметрии картины

$$H = 2h = 2F \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (27.16)$$

Для малых углов дифракции

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \approx \sin \varphi_1. \quad (27.17)$$

Условием минимума является соотношение (27.14):

$$b \sin \varphi_1 = \pm 2k \frac{\lambda}{2},$$

здесь по условию $k = 1$.

Из уравнений (27.14), (27.16), (27.17) с учетом, что $F = 1/D$, имеем (знак « $-$ » в формуле (27.14) опускаем):

$$H = \frac{2\lambda}{bD} = 1,2 \text{ мм.}$$

27.8. Дифракция от N щелей (дифракционная решетка)

Прозрачная дифракционная решетка, работающая на пропускание света, представляет собой чередование большого числа прозрачных и непрозрачных промежутков — щелей (рис. 27.34). Расстояние между серединами соседних, прозрачных щелей называется *периодом* решетки d .

Предположим, что на дифракционную решетку падает плоская монохроматическая волна. Рассмотрим соответственные лучи, дифрагирующие под углом φ и идущие от одинаковых точек щелей. Эти лучи собираются линзой на экране в точке наблюдения P . Так как колебания, приходящие в точку наблюдения являются когерентными,

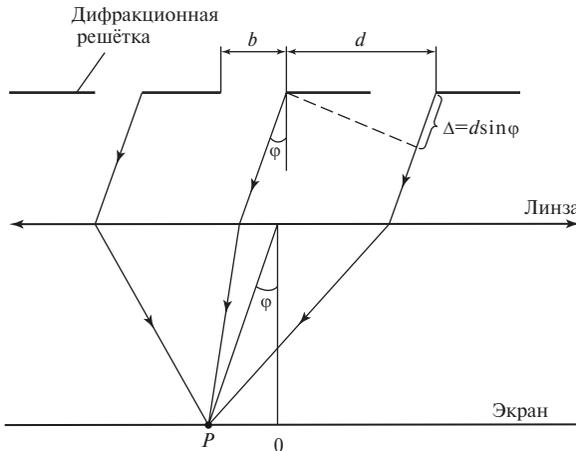


Рис. 27.34

то дифракция от N щелей не является простой суммой дифракционных картин от каждой щели в отдельности. Для расчета такой картины необходимо учитывать взаимную интерференцию колебаний, приходящих от разных щелей.

Главные максимумы дифракционной картины отвечают таким углам дифракции, при которых соответственные лучи, идущие от разных щелей, приводят к перераспределению интенсивности в сторону ее увеличения (колебания взаимно «усиливают» одно другое). Поэтому результирующая амплитуда колебания в данной точке на экране

$$\vec{A}_{\text{рез}} = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i,$$

где амплитуда A_i соответствует колебанию, приходящему от одной щели. Так как все щели занимают по отношению к углу дифракции совершенно одинаковое положение, то

$$A_1 = A_2 = \dots = A_N = A \quad \text{и} \quad A_{\text{рез}} = NA.$$

Поэтому:

$$I_{\text{рез}} = N^2 I,$$

где I — интенсивность, создаваемая одной щелью. Таким образом, интенсивность главного максимума картины, наблюдаемой от дифракционной решетки, в N^2 раз больше интенсивности максимума картины от одной щели.

Разность фаз колебаний δ связана с разностью хода Δ соотношением

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda},$$

где λ — длина световой волны.

Из рис. 27.34 видно, что $\Delta = d \sin \varphi$. Подставим это выражение в последнюю формулу и учтем, что в максимумах интенсивности колебания должны происходить синфазно, т.е. $d = \pm 2m\pi$, где $m = 0, 1, 2, 3 \dots$. Как результат имеем:

$$\pm 2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi,$$

или

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda, \tag{27.18}$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Условие (27.18) определяет положения главных максимумов интенсивности.

Главные минимумы соответствуют таким направлениям дифрагирующих лучей, при которых получается условие минимума для одной щели (см. (27.14)):

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (27.19)$$

где b — ширина щели, $k = 1, 2, 3, \dots$

Дело в том, что главные минимумы соответствуют результату интерференции лучей в пределах каждой отдельной щели. И если каждая щель в данном направлении света не посылает, то и от N щелей в этом направлении света не будет.

Добавочные минимумы соответствуют таким углам, при которых в данном направлении каждая щель свет посылает. Но вследствие интерференции колебаний, приходящих от разных щелей, результирующая амплитуда оказывается равной нулю. Эти колебания взаимно гасятся:

$$\vec{A}_{\text{рез}} = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i = 0 \quad \text{и} \quad I_{\text{рез}} = 0.$$

Вспользуемся графическим методом сложения амплитуд. Сложим этим методом амплитуды \vec{A}_1 и \vec{A}_2 двух колебаний по правилу параллелограмма (рис. 27.35).

Из рисунка видно, что $\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ (φ_1 и φ_2 начальные фазы соответственно первого и второго колебательного процессов). Но совершенно аналогично $\vec{A}_{\text{рез}}$ можно получить из сложения тех же амплитуд по правилу треугольника (рис. 27.36). На рисунке $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ является разностью фаз колебаний.

Если колебаний не два, а N (от N щелей), причем с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2 = \dots = A_N = A$, то картина сложения амплитуд будет соответствовать представленной на рис. 27.37, из которого видно, что для получения минимума дифракции ($\vec{A}_{\text{рез}} = 0$) нужно, чтобы амплитуды складывались в виде замкнутого многоугольника.

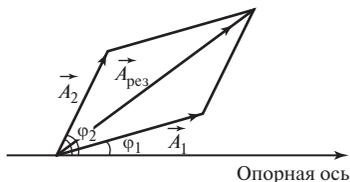


Рис. 27.35

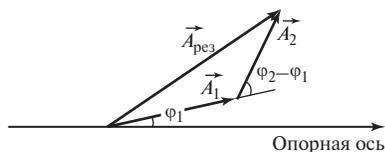


Рис. 27.36

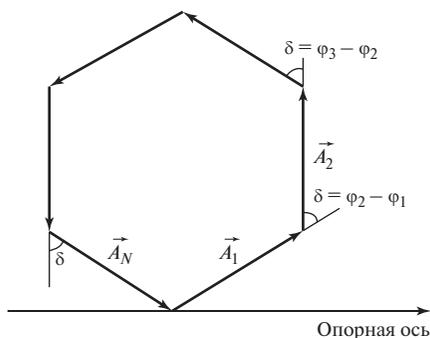


Рис. 27.37

Между любыми соседними векторами амплитуд должен быть одинаковый угол δ . Этот угол, с одной стороны, равен разности фаз этих колебаний $\delta = 2\pi/N$, но с другой стороны, $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$. И, следовательно, $2\pi/N = 2\pi\Delta/\lambda$. Но $\Delta = d \sin \varphi$, поэтому $d \sin \varphi = \lambda/N$.

В дифракционной картине наблюдается не один минимум, и для нахождения остальных нужно обойти многоугольник 2 раза, 3 раза и т.д.:

$$\Delta = d \sin \varphi = \frac{\lambda}{N}; \frac{2\lambda}{N}; \frac{3\lambda}{N}; \dots,$$

т.е.

$$d \sin \varphi = k' \frac{\lambda}{N} \text{ где } k' = 1, 2, 3, \dots (N-1), (N+1), \dots$$

При $m = 0, N, 2N, \dots$ наблюдаются главные максимумы, поэтому эти значения исключаются. Таким образом, между двумя главными максимумами, соответствующими условию $d \sin \varphi = m\lambda$, где $m = 0, N, 2N, \dots$, лежат по $N-1$ добавочных минимумов, определяемых разностью хода

$$d \sin \varphi = m\lambda + k'' \lambda/N, \quad (27.20)$$

где k'' пробегает значения от 1 до $N-1$ ($k'' \neq N$). Между добавочными минимумами располагаются вторичные максимумы. Число таких максимумов, приходящихся на промежуток между главными соседними максимумами, равно $N-2$. Интенсивность вторичных максимумов очень мала. Самое большее она составляет $1/22$ интенсивности ближайшего главного максимума.

На рис. 27.38 приведен график функции $I = f(\sin \varphi)$ для $N = 4$ и $d/b = 3$. Штриховая кривая, проходящая через вершины главных максимумов, изображает интенсивность от одной щели, умноженную на N^2 .

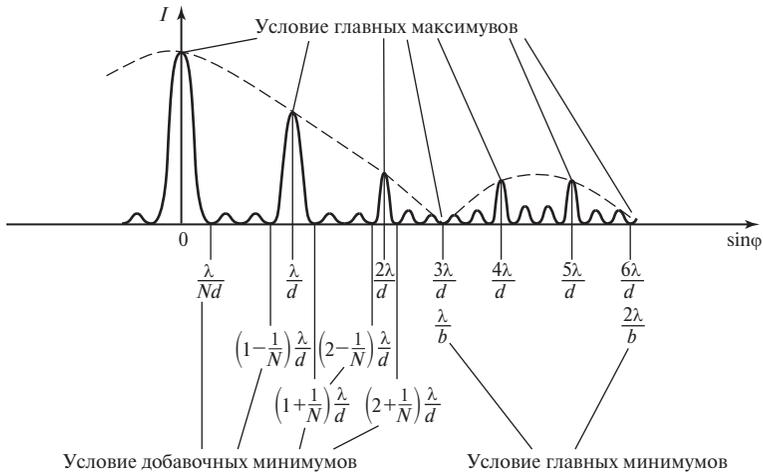


Рис. 27.38

При данном отношении, $d/b = 3$, как видно из рисунка, главные максимумы третьего, шестого и т.д. порядков приходятся на минимумы интенсивности от одной щели, вследствие чего эти максимумы пропадают. Из формул (27.18) и (27.19) вытекает, что главный максимум m -го порядка приходится на k -й минимум от одной щели, если будет выполнено условие $m/d = k/b$ или $m/k = d/b$.

Это возможно, если d/b равно отношению двух целых чисел.

Тогда главные максимумы с номерами равными $\frac{d}{b}$, $2\frac{d}{b}$, $3\frac{d}{b}$ и т.д. пропадают.

Положение главных максимумов зависит от длины волны λ . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, разложатся в спектр. Фиолетовый цвет спектра ближе к центру дифракционной картины, красный — к периферии.

С учетом того, что модуль $\sin \varphi$ не может превысить единицу, из анализа формулы дифракционной решетки для главных максимумов вытекает, что

$$|\sin \varphi| = m\lambda/d \leq 1.$$

Отсюда следует, что дифракционная картина будет отсутствовать, если $d < \lambda$. Если $d \gg \lambda$, картина перестает быть отчетливой, так как угловое расстояние между соседними максимумами станет столь малым, что они начнут перекрываться. Наилучшие результаты получаются тогда, когда d незначительно превышает λ .

Чтобы максимумы близких длин волн различались как разные (*разрешались*) нужно, чтобы выполнялся **критерий Рэлея** (Д.У. Рэлея

(1842—1919)). Согласно этому критерию максимумы (спектральные линии) считаются полностью разрешенными, если середина одного максимума совпадает с *краем* другого, т.е. два близких максимума воспринимаются глазом раздельно, если интенсивность в промежутке между ними составляет не более 80 % интенсивности максимума.

На рис. 27.39 представлены два варианта взаимного расположения двух соседних максимумов. В варианте рис. 27.39, *а* они сливаются для глаза, в варианте рис. 27.39, *б* считаются полностью разрешенными. Для варианта рис. 27.39, *б* запишем условия, дающие положения максимумов m -го порядка для волн с λ_1 и λ_2 :

$$d \sin \varphi'_{\max} = m \lambda_1, \quad \text{здесь } \lambda = \lambda_1;$$

$$d \sin \varphi''_{\max} = m \lambda_2, \quad \text{где } \lambda_2 = \lambda_1 + \delta \lambda.$$

Для перехода от m -го максимума для длины волны λ_1 к соответствующему минимуму (краю максимума) необходимо изменить направление дифрагирующего луча так, чтобы разность изменилась на λ_1/N , где N — число штрихов решетки. Таким образом, минимум для света с длиной волны λ_1 наблюдается в направлении φ_{\min} . Согласно критерию Рэля

$$\varphi''_{\max} = \varphi_{\min},$$

откуда

$$m \lambda_2 = m \lambda_1 + \lambda_1 / N, \quad \text{или} \quad \lambda_1 / (\lambda_2 - \lambda_1) = m N.$$

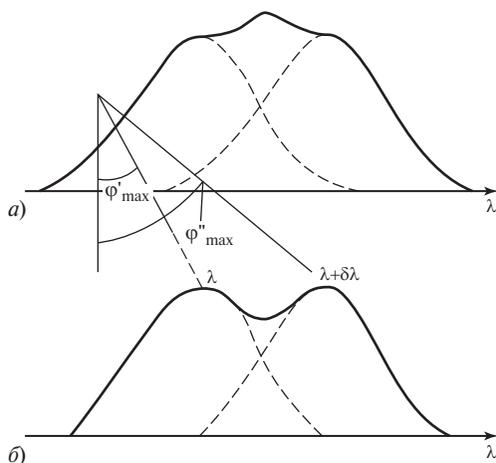


Рис. 27.39

Так как λ_2 и λ_1 отличаются на $\delta\lambda$, то

$$R = \lambda / (\delta\lambda) = mN, \quad (27.21)$$

где R называется *разрешающей силой* дифракционной решетки и является одной из основных характеристик дифракционной решетки.

Разрешающая сила равна произведению порядка дифракционного максимума на полное число штрихов решетки. Для данной дифракционной решетки разрешающая сила тем больше, чем больше порядок дифракционного максимума. Для данного максимума разрешающая сила тем больше, чем больше число штрихов N . Итак, как следует из формулы (27.21), разрешающая сила определяет минимальную разность длин волн $\delta\lambda$, при которой две линии воспринимаются в спектре раздельно.

Другой важнейшей характеристикой дифракционной решетки является *угловая дисперсия*:

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda},$$

где $\delta\varphi$ — угловое расстояние между спектральными линиями, различающимися по длине волны на $\delta\lambda$.

Взяв производную от левой и правой частей уравнения, выражающего условие главных максимумов для дифракционной решетки (27.18), получим:

$$d \cos \varphi \delta\varphi = m\delta\lambda.$$

Отсюда

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}.$$

Для небольших углов дифракции $\cos \varphi \approx 1$, поэтому $D \approx m/d$.

Таким образом, чем больше порядок максимума m , тем больше дисперсия, т.е. угловое расстояние между двумя спектральными линиями в этом порядке m больше по сравнению с угловым расстоянием между теми же по цвету линиями в максимуме меньшего порядка (максимумы становятся шире с увеличением номера порядка m). Дисперсия зависит и от периода решетки d : с увеличением периода она уменьшается.

Линейной дисперсией называется величина

$$D_{\text{лин}} = \frac{\delta l}{\delta\lambda},$$

где δl — линейное расстояние на экране между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta\lambda$.

Линейная дисперсия связана с фокусным расстоянием f линзы, собирающей дифрагирующие лучи на экране, и угловой дисперсией D (при небольших углах φ) соотношением

$$D_{\text{лин}} = fD, \quad \text{или} \quad D_{\text{лин}} = f \frac{m}{d}.$$

Современные технологии позволяют изготавливать дифракционные решетки с очень большим числом штрихов на 1 мм длины решетки. Например, 500 штрих/мм, 600 штрих/мм, 1200 штрих/мм. Решетка с $N_1 = 1200$ штрих/мм обладает прекрасной разрешающей силой. Максимум первого порядка дифракционной картины, полученный от этой решетки, имеет ширину около 700 мм. Второго порядка от такой решетки не наблюдается. Действительно, $d \sin \varphi = m\lambda$, где $d = 1/N_1$. Положим $m = 2$ и $\lambda = 500$ нм. Тогда

$$\sin \varphi = m\lambda N_1 = 2 \cdot 50 \cdot 10^{-9} \cdot 1200 \frac{1}{10^{-3}} = 1,2.$$

Но $\sin \varphi \leq 1$, следовательно, второго порядка нет и вся дифракционная картина представляет собой два максимума первого порядка, симметрично расположенных относительно максимума нулевого порядка.

Выше была рассмотрена так называемая одномерная дифракционная решетка, работающая на пропускание света. Существуют более сложные решетки — двумерные и трехмерные (пространственные). Для образования двумерной решетки нужно сложить две одномерные так, чтобы их щели были взаимно перпендикулярны. Для каждой из этих решеток условия наблюдения главных максимумов предстанут в виде двух уравнений:

$$d_1 \sin \varphi_1 = \pm m_1 \lambda; \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots); \quad (27.22)$$

$$d_2 \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda; \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots). \quad (27.23)$$

Измеряя углы дифракции φ_1 и φ_2 и зная длину волны λ , находим по формулам (27.22), (27.23) периоды двумерной решетки d_1 и d_2 . Подобная двумерная структура дает дифракционную картину в виде симметрично расположенных пятен, каждому из которых соответствуют два целочисленных значения m_1 и m_2 .

Набор равноотстоящих и параллельных друг другу двумерных решеток представляет собой трехмерную пространственную решетку. Такими естественными пространственными решетками являются все кристаллические тела. Период кристаллической решетки d (расстояние между соседними атомами) составляет около 10^{-10} м (0,1 нм). Для наблюдения дифракции на решетке должно выполняться условие $d > \lambda$. Поэтому видимый свет с диапазоном

длин волн 400—750 нм на кристаллической решетке не дифрагирует. Условие $d > \lambda$ выполняется только для *рентгеновских* лучей. Впервые дифракция рентгеновских лучей от кристаллов наблюдалась в 1913 г. в опыте М. Лауэ (1879—1960), В. Фридриха (1883—1968) и П. Книппинга (1883—1935). На рис. 27.40 приведена дифракционная картина берилла.

Метод Ю.В. Вульфа (1863—1925), У.Г. Брэгга (1862—1942) и У.Л. Брэгга (1890—1971) позволяет рассчитать дифракционную картину от кристаллической решетки.

Рассечем кристалл рядом параллельных кристаллических плоскостей, расстояние между которыми $d \approx 10^{-10}$ м (рис. 27.41). Направим на кристалл плоскую электромагнитную волну под углом скольжения θ . Отражившиеся от кристаллических плоскостей вторичные волны будут интерферировать, так как являются когерентными волнами. Разность хода между двумя лучами 1 и 2, отразившимися от соседних кристаллических плоскостей, может быть найдена из $\triangle ABC$: $BC = d \sin \theta$ и, следовательно, разность хода $BCD = 2d \sin \theta$. Поэтому направления, для которых получаются дифракционные максимумы, определяются условием

$$2d \sin \theta = \pm m\lambda,$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$ Это соотношение называется *формулой Брэгга—Вульфа*.

Дифракция рентгеновских лучей позволяет решить две фундаментальные задачи:

1. Изучение структуры кристалла — *рентгеноструктурный анализ*, т.е., изучая дифракцию рентгеновских лучей известной длины волны на кристаллических решетках неизвестной структуры, можно определить период решетки и изучить расположение атомов в кристалле.

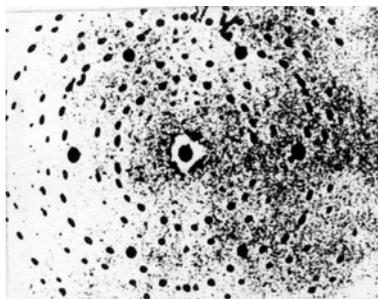


Рис. 27.40

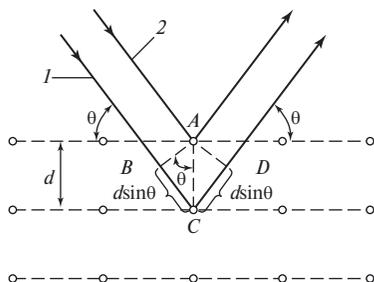


Рис. 27.41

2. Исследование спектрального состава рентгеновского излучения — *рентгеноспектроскопия*, т.е., изучая дифракцию рентгеновского излучения неизвестной длины волны на кристаллах известной структуры, можно определять длины волн рентгеновского излучения.

Пример 27.6. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает плоская монохроматическая световая волна ($\lambda = 500$ нм). Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на $L = 1$ м. Расстояние между двумя максимумами первого порядка на экране $l = 20,2$ см. Найдите: 1) период дифракционной решетки d ; 2) число штрихов N_1 , приходящихся на 1 мм длины решетки; 3) число порядков, которое дает решетка; 4) угол отклонения лучей φ , соответствующих последнему дифракционному максимуму.

1. Запишем формулу для главных максимумов дифракционной решетки (27.18) для нашей конкретной задачи, опуская знак « \leftarrow » и учитывая, что $m = 1$, а $\varphi = \varphi_1$ (под углом φ_1 виден максимум первого порядка):

$$d \sin \varphi_1 = \lambda. \quad (27.24)$$

Из $\triangle BAD$ (рис. 27.42) найдем $\operatorname{tg} \varphi_1 = l/(2L) = 0,1$; $\varphi_1 = 5,8^\circ$. Для таких малых углов $\sin \varphi_1 \approx \operatorname{tg} \varphi_1$. Подставляя вместо $\sin \varphi_1$ в уравнение (27.24) $\operatorname{tg} \varphi_1$, получаем

$$d = 2\lambda L / l = 4,95 \text{ мкм.}$$

2. По определению число штрихов, приходящихся на единицу длины решетки, равно величине, обратной периоду решетки:

$$N_1 = 1/d = 202 \text{ штрих/мм.}$$

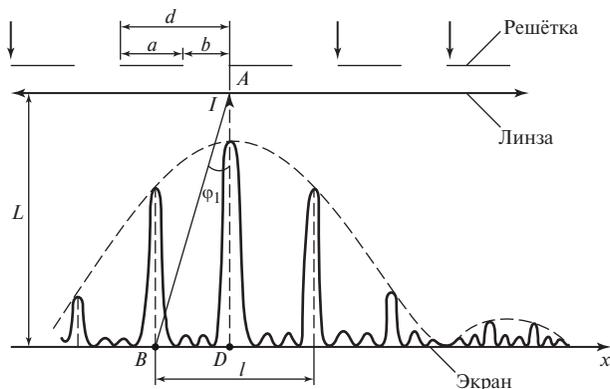


Рис. 27.42

3. Число порядков найдем из условия, что угол отклонения лучей решеткой не должен превышать 90° , т.е. $(\sin \varphi) = 1$, и, следовательно, уравнение главных максимумов (27.18) $d \sin \varphi = m\lambda$ запишется в виде $d = m\lambda$, или

$$m = d/\lambda = 9,9.$$

Но число m должно быть целочисленным и не должно быть равно 10. Поэтому $m = 9$. Полное число порядков (по обе стороны от максимума нулевого порядка, включая его) равно $2m + 1$, т.е. 19.

4. Максимальный угол, под которым виден самый дальний от центра картины максимум с номером порядка $m = 9$, рассчитывается по формуле

$$d \sin \varphi_{\max} = m\lambda,$$

отсюда

$$\sin \varphi_{\max} = m\lambda/d; \quad \varphi_{\max} = \arcsin (m\lambda/d) = 65,4^\circ.$$

Пример 27.7. Дифракционная решетка, имеющая $N_1 = 500$ штрихов на 1 мм длины решетки, дает на экране, отстоящем от линзы на расстояние $L = 1$ м, спектр. Определите, на каком расстоянии l_1 одна от другой будут находиться фиолетовые границы спектров второго порядка ($\lambda_\phi = 400$ нм).

Условие главных максимумов дифракционной картины (27.18):

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda,$$

без знака « \pm », с учетом, что $d = 1/N_1$, а $m = 2$, запишется в виде

$$\frac{1}{N_1} \sin \varphi = 2\lambda; \quad \sin \varphi = 2\lambda N_1 = 0,4; \quad \varphi = 23,6^\circ.$$

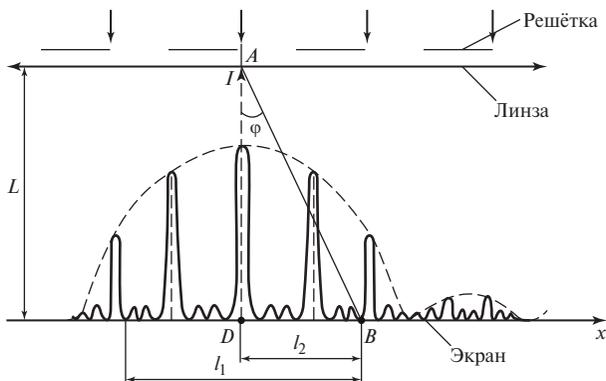


Рис. 27.43

Из $\triangle DAB$ (рис. 27.43) имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = l_2 / L;$$

или, в силу симметрии дифракционной картины $l_1 = 2l_2 = 2L \operatorname{tg} \varphi = 0,87$ м.

Пример 27.8. Монохроматический свет с $\lambda = 589$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2,5$ мкм. Решетка содержит $N = 10\,000$ штрихов. Определите угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

Положение добавочных минимумов, примыкающих к главному максимуму m -го порядка, определяется условием

$$d \sin \varphi = (m \pm 1/N)\lambda,$$

что следует из формулы (27.20). Откуда для угловой ширины m -го максимума имеем выражение

$$\delta\varphi_m = \arcsin \left(m + \frac{1}{N} \right) \frac{\lambda}{d} - \arcsin \left(m - \frac{1}{N} \right) \frac{\lambda}{d}.$$

Обозначив $m\lambda/d = x$, а $\lambda/(Nd) = \Delta x$, получим:

$$\delta\varphi_m = \arcsin (x + \Delta x) - \arcsin (x - \Delta x).$$

При большом числе щелей $\Delta x = \lambda/(Nd)$ будет очень мало. Поэтому можно положить, что

$$\arcsin (x \pm \Delta x) \approx \arcsin x \pm (\arcsin x)' \Delta x.$$

Таким образом,

$$\delta\varphi_m \approx 2 (\arcsin x)' \Delta x = \frac{2\Delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2(\lambda/d)^2}} \frac{2\lambda}{Nd}.$$

Искомая угловая ширина главного максимума второго порядка

$$\delta\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-4(\lambda/d)^2}} \frac{2\lambda}{Nd} = 11''.$$

Пример 27.9. При нормальном падении света на прозрачную дифракционную решетку длиной $L_1 = 10$ мм обнаружено, что компоненты желтой линии натрия ($\lambda'_1 = 5890$ Å и $\lambda''_1 = 5896$ Å) ($1 \text{ Å} = 10^{-10}$ м) оказываются разрешенными, начиная с пятого порядка спектра. Оцените: 1) период этой решетки; 2) длину решетки с таким же периодом, чтобы можно было разрешить в третьем порядке дублет спектральной линии с $\lambda_2 = 4600$ Å, компоненты которого различаются по длинам волн на $\delta\lambda_2 = 1,3$ Å.

1. Запишем для разрешающей силы R решетки формулу (27.21):

$$R = \lambda / \delta\lambda = m_1 N.$$

Выразим длину решетки с помощью соотношения $L_1 = Nd$. Откуда найдем $N = L_1 / d$ и подставим в формулу (27.21). В результате имеем:

$$d = m_1 L_1 \delta\lambda / \lambda = 0,05 \text{ мм.}$$

2. По аналогии с расчетами в предшествующем п. 1 получим:

$$L_2 = \frac{d\lambda_2}{m_2 \delta\lambda_2} = 6 \text{ см.}$$

27.9. Поляризация

Естественные источники света такие, например, как лампочки накаливания, излучают естественный (неполяризованный свет). Действительно, под действием тока спираль лампочки накаливается до высокой температуры. Электроны атомов материала спирали приобретают дополнительную энергию и переходят в атомах на более высокие энергетические уровни. Вновь возвращаясь на невозбужденные уровни, электроны излучают световые волны. Процесс излучения отдельного атома длится около 10^{-8} с. Излучения огромного числа отдельных атомов накладываются одно на другое, образуя результирующую волну, в которой колебания светового вектора \vec{E} различных направлений перпендикулярны скорости распространения волны. Эти колебания равноправны и равновероятны (рис. 27.44). Такой свет называется *естественным*. В отличие от естественного света, *поляризованным* называется свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом. В частности, в *частично поляризованном* свете колебание вектора \vec{E} совершается преимущественно в одном направлении.

На рис. 27.45 представлен луч света, в котором преобладают колебания, перпендикулярные плоскости чертежа. Они обозначаются точками. Колебания в плоскости чертежа изображены двусторонними стрелками. Напомним, что лучами называют линии, вдоль которых распространяется энергия световой волны.

Плоскополяризованным, или *линейнополяризованным*, называется свет только с *одним* направлением колебания вектора \vec{E} (рис. 27.46).

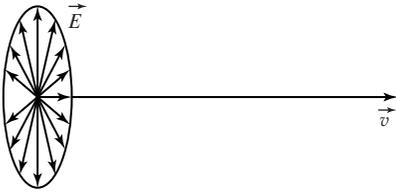


Рис. 27. 44

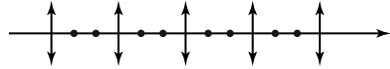


Рис. 27. 45

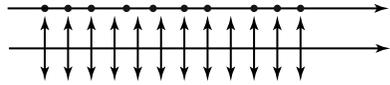


Рис. 27. 46

Упорядоченность колебаний может проявляться в том, что вектор \vec{E} в процессе колебаний поворачивается вокруг луча. В результате конец вектора \vec{E} описывает эллипс или окружность. Тогда свет соответственно называется *эллиптически поляризованным* или *поляризованным по кругу*.

Плоскополяризованный свет из естественного можно получить с помощью приборов, называемых *поляризаторами*. Поляризаторы свободно пропускают колебания вдоль плоскости, которая называется *плоскостью поляризатора*, и задерживают свет с колебаниями светового вектора, перпендикулярными плоскости поляризатора.

На выходе из несовершенного поляризатора получается свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений. Такой свет называется частично поляризованным. Его можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного.

Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении поляризатора вокруг направления распространения света интенсивность прошедшего света будет изменяться от I_{\max} до I_{\min} , причем переход от одного из этих значений к другому будет совершаться при повороте на угол, равный $\pi/2$ (за один полный поворот 2 раза будет достигаться максимальное и 2 раза минимальное значения интенсивности). Выражение

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (27.25)$$

называется *степенью поляризации*. Для плоскополяризованного света $I_{\min} = 0$ и $P = 1$, для естественного $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$.

Пусть на пути распространения естественного света располагаются два совершенно одинаковых поляризатора P и P' (рис. 27.47). В такой схеме последовательного расположения поляризаторов второй поляризатор P' называется анализатором, так как он предназна-

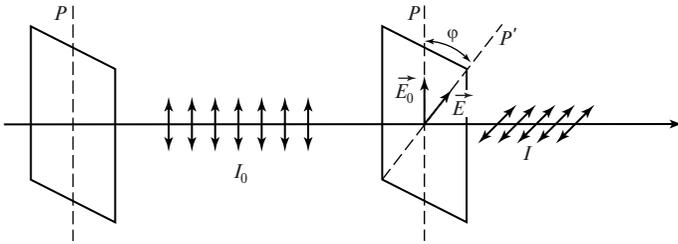


Рис. 27.47

чен для анализа поляризованного света, прошедшего через первый поляризатор.

В луче света, прошедшем через поляризатор P , будут присутствовать колебания светового вектора только в плоскости, параллельной плоскости этого поляризатора. А в луче света, прошедшем через анализатор P' , колебания вектора \vec{E} будут осуществляться в плоскости, параллельной плоскости анализатора. Предположим, что плоскости этих двух поляризаторов составляют между собой угол φ (рис. 27.47). Тогда амплитуда E колебания, прошедшего через анализатор, будет связана с амплитудой E_0 колебания, прошедшего через поляризатор P , соотношением (рис. 27.48)

$$E = E_0 \cos \varphi, \tag{27.26}$$

здесь E является проекцией \vec{E}_0 на направление плоскости пропускания анализатора. Возведем левую и правую части уравнения (27.26) в квадрат, получим:

$$E^2 = E_0^2 \cos^2 \varphi$$

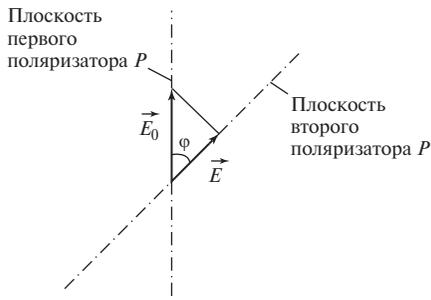


Рис. 27.48

С учетом того что интенсивность света I пропорциональна квадрату амплитуды волны, имеем

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (27.27)$$

Соотношение (27.27) носит название **закона Малюса** (Э.Л. Малюс (1775—1812)). Закон Малюса гласит, что интенсивность света I , прошедшего анализатор, равна интенсивности света I_0 , падающего на анализатор, умноженной на квадрат косинуса угла φ между плоскостями пропускания поляризаторов. Напоминаем, что I_0 характеризует интенсивность плоскополяризованного света.

27.10. Отражение и преломление света на границе раздела двух диэлектриков

Предположим, что естественный свет падает на границу раздела двух любых диэлектрических сред под углом i (рис. 27.49). Свет частично отражается и частично преломляется. Причем оба луча — отраженный и преломленный — в общем случае будут частично поляризованы. В отраженном луче будут преобладать колебания вектора \vec{E} , перпендикулярные плоскости падения луча, в преломленном — в плоскости падения. Физически это объясняется характером взаимодействия света с веществом. Световая волна, попадая во вторую среду, вызывает вынужденные колебания электронов вещества.

Составляющая вектора \vec{E} , лежащая в плоскости падения, вызывает коллинеарные ей колебания. В результате возникают диполи, плечо которых лежит в плоскости падения (рис. 27.50). Эти диполи

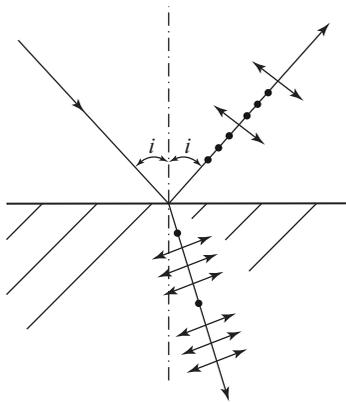


Рис. 27.49

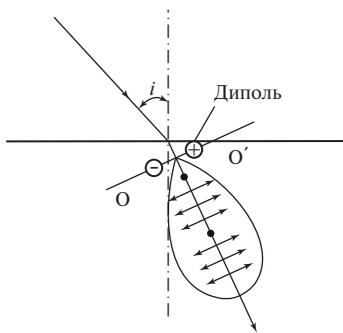


Рис. 27.50

будут изучать волну с колебаниями вектора \vec{E} также в плоскости падения в направлении преломленного луча. Диполь имеет диаграмму направленности (рис. 27.51), представляющую собой зависимость интенсивности излучения от угла φ , т.е., как видно из рис. 27.51, диполь в основном излучает в направлении, перпендикулярном оси диполя. В направлении, совпадающем с осью, диполь не излучает. Таким образом, внутри диэлектрика вторичные волны складываются с первичной (падающей) волной. Результирующая первичной и вторичной волн дает преломленную волну. Ось диполей, лежащих в плоскости падения OO' , должна быть перпендикулярна преломленному лучу. Максимальную энергию эти диполи будут излучать в направлении преломленного луча. Излучать в направлении отраженного луча они практически не будут, так как ось диполей составляет с этим направлением очень малый угол.

Составляющая вектора \vec{E} падающей на диэлектрик волны, перпендикулярная плоскости падения, вызывает колебания зарядов в этой же плоскости. Ось OO' возникших диполей будет перпендикулярна плоскости падения луча (рис. 27.52). Такие диполи станут излучать в направлении отраженного луча. В падающем луче естественного света интенсивность различных колебаний одинакова. Энергия этих колебаний распределяется между отраженной и преломленной волной. Поэтому если в преломленном луче будет больше интенсивность колебания одного направления, то в силу закона сохранения энергии в отраженном луче должна быть больше интенсивность колебаний другого направления. Откуда следует, что отраженный луч будет частично поляризован.

Как показывает опыт, свет, отраженный от границы раздела двух диэлектрических сред, оказывается плоскополяризованным при таком угле падения i_B , при котором отраженный и преломленный лучи будут взаимно перпендикулярны (рис. 27.53). Это условие приводит к равенству:

$$i_B + r_B + \pi/2 = \pi,$$

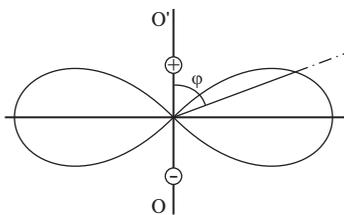


Рис. 27.51

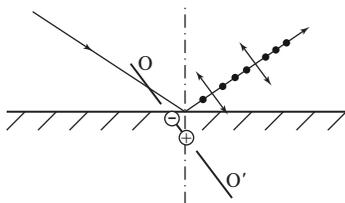


Рис. 27.52

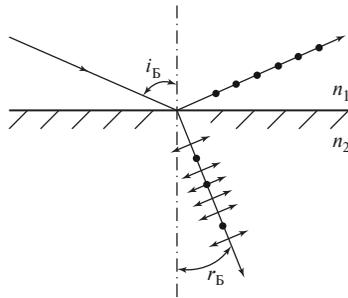


Рис. 27.53

или:

$$i_B + r_B = \pi/2; \quad (27.28)$$

здесь r_B является углом преломления.

Из закона В. Снелля

$$\sin i_B / \sin r_B = n_{12},$$

где $n_{12} = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления второй среды относительно первой, и равенства (27.28) имеем

$$\frac{\sin i_B}{\sin(\pi/2 - i_B)} = n_{12},$$

или

$$\operatorname{tg} i_B = n_{12}. \quad (27.29)$$

Уравнение (27.29) называется **законом Брюстера** (Д. Брюстер (1781—1868)).

Степень поляризации отраженного и преломленного света при различных углах падения можно определить с помощью формул Френеля. Они устанавливают соотношения между амплитудами падающей, преломленной и отраженной волн.

Всякую плоскую монохроматическую волну можно представить как совокупность двух плоских монохроматических волн той же частоты, в которых векторы \vec{E} колеблются вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений

$$E_y = A_1 \sin(\omega t - kx + \alpha_1);$$

$$E_z = A_2 \sin(\omega t - kx + \alpha_2).$$

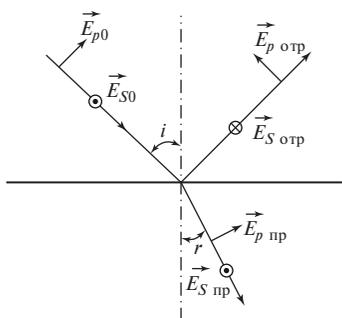


Рис. 27.54

Поэтому для нахождения закономерностей отражения и преломления рассмотрим колебания вектора \vec{E} в плоскости падения (p -волна) и в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (S -волна) (рис. 27.54).

Обозначим амплитуды напряженности для падающей, отраженной и преломленной p - и S -волн в точках поверхности раздела соответственно E_{p0} , $E_{p \text{ отр}}$, $E_{p \text{ пр}}$, E_{S0} , $E_{S \text{ отр}}$, $E_{S \text{ пр}}$. Тогда формулы Френеля запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_{p \text{ отр}} &= E_{p0} \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}; \\ E_{p \text{ пр}} &= E_{p0} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i+r)}; \\ E_{S \text{ отр}} &= -E_{S0} \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}; \\ E_{S \text{ пр}} &= E_{S0} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)}. \end{aligned} \right\} \quad (27.30)$$

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ВЕЩЕСТВОМ

28.1. Двойное лучепреломление

При прохождении света через анизотропные тела — прозрачные кристаллы, для которых механические, электрические, оптические и другие свойства зависят от направления внутри кристалла, световой луч разбивается на два. Это явление получило название **двойного лучепреломления**. На выходе из кристалла эти два луча оказываются пространственно разделенными и поляризованными в двух взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 28.1). Для одного из них при изменении угла падения отношение $\sin i / \sin r$ остается постоянным ($n_0 = \text{const}$). Такой луч называется **обыкновенным** (o). Плоскость колебания светового вектора в обыкновенном луче перпендикулярна главному сечению кристалла.

Для другого — **необыкновенного** — луча (e), при изменении угла падения отношение $\sin i / \sin r$ не остается постоянным ($n_e \neq \text{const}$).

Плоскость колебания вектора \vec{E} для этого луча лежит в плоскости главного сечения кристалла. Главным сечением кристалла для данного светового луча называется плоскость, содержащая световой луч и **оптическую ось** кристалла. **Оптической осью** называется направление в кристалле, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи идут не разделяясь. Следует помнить, что через кристалл

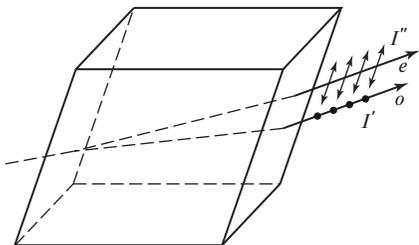


Рис. 28.1

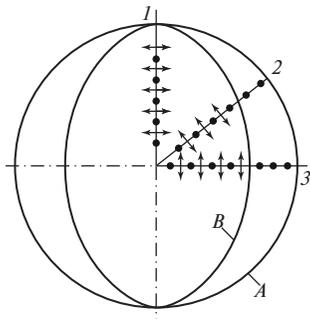


Рис. 28.2

можно провести бесчисленное множество главных сечений. Существуют кристаллы, имеющие очень сложную структуру.

В настоящей главе рассматриваются лишь те кристаллы, которые имеют только одно направление, вдоль которого не происходит двойного лучепреломления. Такие кристаллы называются *одноосными*.

Одноосными кристаллами являются, например, исландский шпат и кварц. В большинстве одноосных кристаллов яркость обыкновенного и необыкновенного лучей одинакова. Однако в кристалле турмалина толщиной около 1 мм обыкновенный луч практически полностью поглощается. Такое различное поглощение называется *дихроизмом*. Это свойство турмалина используется для получения поляризованного света.

Явление двойного лучепреломления объясняется исключительно *анизотропией* кристалла. В естественном луче света, падающем на кристалл, все направления колебания вектора \vec{E} равноценны и равновероятны. Составляющая светового вектора, перпендикулярная главному сечению кристалла, вызывает ей коллинеарные колебания электронов вещества. Образующиеся диполи излучают вторичные волны, у которых вектор \vec{E} также перпендикулярен главному сечению кристалла. Эти вторичные волны, интерферируя между собой и с составляющей проходящего луча, имеющей то же направление вектора \vec{E} , образуют обыкновенный луч. В этом луче вектор \vec{E} , будучи перпендикулярен главному сечению кристалла, будет перпендикулярен и оптической оси независимо от направления его распространения внутри кристалла. В одноосных кристаллах все направления, перпендикулярные оптической оси, равноценны, поэтому на обыкновенном луче анизотропные свойства кристалла не сказываются. Вследствие этого луч распространяется внутри кристалла с некоторой постоянной скоростью ($v_0 = \text{const}$, $n_0 = \text{const}$). На рис. 28.2 показано, что обыкновенный луч, распространяясь в трех различных (1, 2, 3) направлениях, проходит за одно и то же время одинаковые расстояния. Колебания вектора \vec{E} в нем изображены точками. Таким образом, волновой поверхностью обыкновенного луча является сфера A .

Составляющая вектора \vec{E} , лежащая в плоскости главного сечения, вызывает колебания диполей в этой же плоскости. Диполи излучают волны с колебанием светового вектора в плоскости главного сечения кристалла. Эти волны, интерферируя с проходящей волной,

образуют необыкновенный луч. Колебания вектора \vec{E} в необыкновенном луче в зависимости от направления распространения в кристалле составляют различный угол с оптической осью. Поэтому в различных направлениях этот луч будет распространяться с различной скоростью. В частности, для положительного кристалла (рис. 28.2) (в котором скорость необыкновенного луча меньше скорости обыкновенного $v_e < v_o$, и показатель преломления необыкновенного луча больше показателя преломления обыкновенного луча: $n_e > n_o$), скорость необыкновенного луча будет наибольшей для направления 1 и наименьшей для направления 3 ($v_e \neq \text{const}$, $n_e \neq \text{const}$). Колебания светового вектора в необыкновенном луче изображены на рис. 28.2 двусторонними стрелками. Волновой поверхностью для необыкновенного луча является *эллипсоид* вращения B (рис. 28.2). Для положительного кристалла эллипсоид вращения B вписан в сферу A . Для отрицательного кристалла, в котором $v_e > v_o$ ($n_e < n_o$), наоборот, сфера вписывается в эллипсоид.

Таким образом, из-за различия скоростей, а следовательно, и показателей преломления ($n_o = c/v_o$, $n_e = c/v_e$) у обыкновенного и необыкновенного лучей при их распространении внутри кристалла, оба эти луча оказываются пространственно разделенными. Возникает явление двойного лучепреломления. И только вдоль оптической оси они распространяются с одинаковой скоростью, не разделяясь, так как колебания вектора \vec{E} в том и другом луче перпендикулярны оптической оси кристалла. Следует подчеркнуть, что именно «необыкновенные» свойства необыкновенного луча приводят к явлению двойного лучепреломления. Именно на этом луче сказываются анизотропные свойства кристалла.

Ход обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле можно изобразить с помощью принципа Гюйгенса. Пусть на положительный кристалл с оптической осью AA' , лежащей в плоскости рисунка, падает плоская волна (рис. 28.3). Фронт волны AB сначала возбуждает в кристалле в точке A вторичные волны, и в кристалле начинают распространяться два луча — e и o с волновыми поверхностями соответственно в виде эллипсоида и сферы. К тому времени, когда фронт волны достигнет поверхности кристалла в точке C , волновые поверхности лучей, распространяющихся из точки A , примут вид, изображенный на рис. 28.3. Около всех точек, промежуточных между A и C , возникнут также волновые поверхности, но меньших размеров. Согласно принципу Гюйгенса огибающая всех вторичных волн показывает новое направление распространения волны. Огибающими вторичных волн в примере являются две плоскости, перпендикуляр-

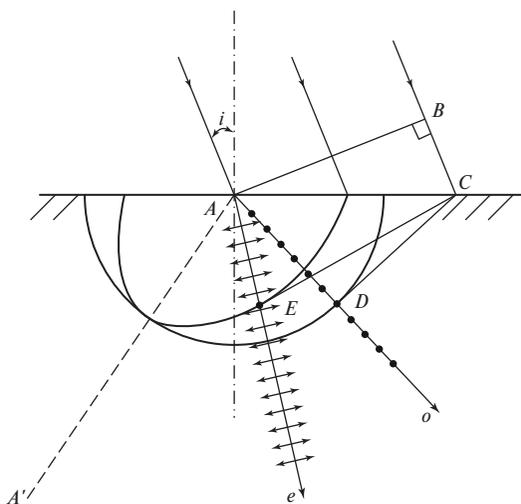


Рис. 28.3

ные плоскости рисунка со следами на нем EC и DC . Эти плоскости являются касательными к волновым поверхностям соответственно необыкновенной и обыкновенной волн и являются фронтами этих преломленных волн. Линия, проведенная через точки A и E , показывает направление распространения необыкновенного луча, а линия, проведенная через точки A и D — ход обыкновенного луча. Луч AE в настоящем примере не нормален к волновому фронту.

Для случая, когда оптическая ось AA' параллельна преломляющей грани кристалла и перпендикулярна плоскости падения, картина построения хода обыкновенного и необыкновенного лучей представлена на рис. 28.4. Волновыми поверхностями необыкновенного и обыкновенного лучей являются соответственно эллипсоид и сфера. Следы пересечения этих фигур с плоскостью рисунка дают две окружности: меньшего диаметра для положительного кристалла — след эллипсоида, большего — сферы. По аналогии с предшествующим примером касательные EC и DC к двум окружностям дают точки E и D , через которые проводятся два луча: необыкновенный — e и обыкновенный — o .

Для получения из естественного света плоскополяризованного света можно воспользоваться либо поляризацией при отражении под углом Брюстера, либо двойным лучепреломлением в кристалле. Плоскополяризованный свет при отражении под углом Брюстера мало интенсивен. При двойном лучепреломлении при небольшой толщине кристалла расхождение плоскополяризованных лучей мало. Поэтому для получения плоскополяризованного света пользуются

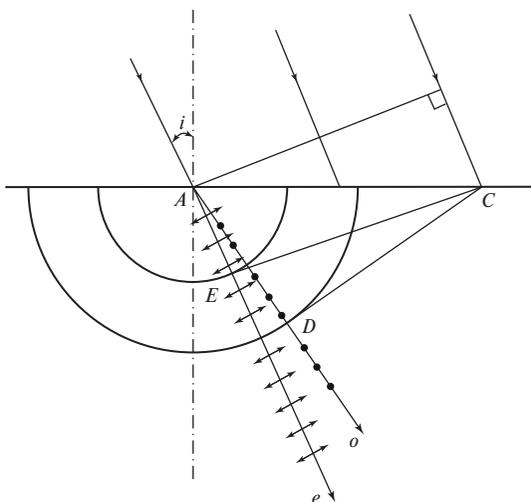


Рис. 28. 4

более сложными системами кристаллов, в частности **призмой Николя**.

У. Николь изобрел призму в 1828 г. Она вырезается из кристалла исландского шпата и в поперечном сечении имеет форму ромба (рис. 28.5). По плоскостям BD призма разрезается и склеивается канадским бальзамом, показатель преломления которого ($n_{к.б} = 1,550$) имеет промежуточное значение между показателями преломления для необыкновенного ($n_e = 1,515$) и обыкновенного ($n_o = 1,658$) лучей ($n_e < n_{к.б} < n_o$). Благодаря такому значению показателя преломления канадского бальзама и специальной ромбоидальной конструкции призмы, обыкновенный луч испытывает полное внутреннее отражение на поверхности канадского бальзама и поглощается в оправе призмы. Необыкновенный луч свободно проходит через слой канадского бальзама и после преломления на грани CD выходит из призмы.

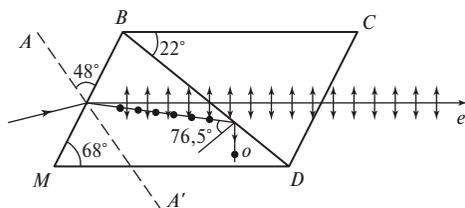


Рис. 28. 5

Для получения поляризатора с большой площадью поверхности применяют поляризующие пленки — поляриды. Они представляют собой пленку целлулоида, на которую нанесено большое число микроскопических одинаково ориентированных кристалликов сильно дихроичного вещества герпатита (сернокислого йод-хинина). Такая пленка с толщиной слоя кристаллов герпатита 0,3 мм полностью поглощает один из лучей.

Пример 28.1. На поляризатор падает естественный свет интенсивностью I_0 . Какова интенсивность света, вышедшего из поляризатора?

Предположим, что амплитуда светового вектора в плоской электромагнитной волне, падающей на поляризатор, равна E_0 и вектор \vec{E}_0 составляет угол β с плоскостью поляризатора. Тогда через поляризатор проходит только составляющая E_{\parallel} , определяемая соотношением:

$$E_{\parallel} = E_0 \cos \beta. \quad (28.1)$$

Возведем левую и правую части соотношения в квадрат и получим:

$$E_{\parallel}^2 = E_0^2 \cos^2 \beta. \quad (28.2)$$

В естественном свете, падающем на поляризатор, все значения β от 0 до 2π равновероятны, так как вектор \vec{E}_0 колеблется во всевозможных направлениях в плоскости, перпендикулярной направлению скорости волны. Поэтому равенство (28.2) нужно усреднить по β . Среднее от постоянной равно самой постоянной. Следовательно, $\langle E_{\parallel}^2 \rangle = E_{\parallel}^2$, а $\langle E_0^2 \rangle = E_0^2$ и

$$E_{\parallel}^2 = E_0^2 \langle \cos^2 \beta \rangle.$$

Для определения $\langle \cos^2 \beta \rangle$ используем теорему о среднем значении функции интегрального исчисления, которая гласит: среднее значение функции на некотором отрезке равно интегралу от этой функции по этому отрезку, деленному на длину отрезка:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Применительно к $\langle \cos^2 \beta \rangle$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \beta \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta \, d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 2\beta)}{2} \, d\beta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\beta + \frac{1}{2} \sin \beta \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$E_{\parallel}^2 = \frac{1}{2} E_0^2.$$

Учитывая, что $I \sim E^2$, получим:

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2} I_0. \quad (28.3)$$

Вывод: интенсивность плоскополяризованного света, вышедшего из поляризатора, равна половине интенсивности естественного света, падающего на поляризатор.

Пример 28.2. Два поляризатора расположены так, что угол между плоскостями этих поляризаторов $\varphi = 60^\circ$ (рис. 28.6). Во сколько раз уменьшается интенсивность света при прохождении через оба поляризатора P_1 и P_2 ? При прохождении каждого из поляризаторов потери на отражение и поглощение света $\eta = 5\%$.

Если бы не было потерь на отражение и преломление, то при прохождении светом первого поляризатора P_1 интенсивность света составила бы

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0.$$

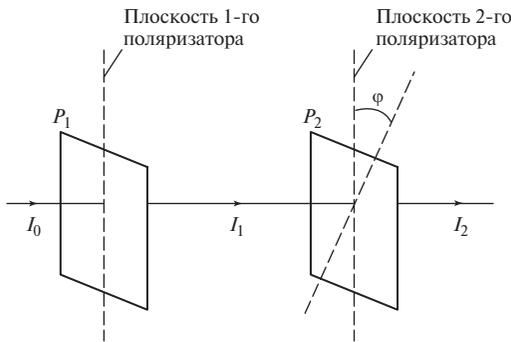


Рис. 28.6

С учетом названных потерь:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0(1 - \eta). \quad (28.4)$$

Расчет интенсивности света I_2 , прошедшего второй поляризатор P_2 , нужно провести с учетом потерь согласно закону Малюса:

$$I_2 = I_1(1 - \eta) \cos^2 \varphi. \quad (28.5)$$

Подстановка выражения для интенсивности света I_1 (28.4) в уравнение (28.5) дает формулу для определения I_2 :

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0(1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi,$$

или

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi} = 8,86.$$

Пример 28.3. На пути частично поляризованного пучка света с интенсивностью I_1 поместили николю — N (рис. 28.7). При его повороте на угол $\alpha = 60^\circ$ вокруг луча из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света I_2 уменьшилась в $n = 3$ раза. Найдите степень поляризации падающего света.

Интенсивность частично поляризованного естественного света I_1 , падающего на поляризатор, равна сумме двух интенсивностей — интенсивности естественного света I_0 и интенсивности плоскополяризованного света I'_1 :

$$I_1 = I_0 + I'_1.$$

Поэтому в положении наибольшего пропускания через поляризатор пройдет свет с интенсивностью

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_0 + I'_1, \quad (28.6)$$

а в положении наименьшего пропускания — свет с интенсивностью

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_0. \quad (28.7)$$

По условию задачи

$$n = I_{\max} / I_{\text{промеж}}, \quad (28.8)$$

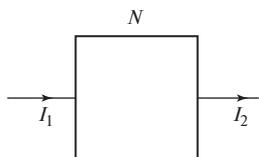


Рис. 28.7

где $I_{\text{промеж}}$ — промежуточное значение интенсивности света, прошедшего через поляризатор, повернутый на угол α из положения наибольшего пропускания света. Причем

$$I_{\text{промеж}} = \frac{1}{2} I_0 + I_1' \cos^2 \alpha. \quad (28.9)$$

Второе слагаемое в уравнении (28.9) с помощью теоремы Малюса определяет интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через поляризатор, повернутый на угол α .

Из соотношений (28.6), (28.8) и (28.9) следует, что

$$n = \frac{\frac{1}{2} I_0 + I_1'}{\frac{1}{2} I_0 + I_1' \cos^2 \alpha},$$

откуда

$$I_0 = \frac{2I_1'(1 - n \cos^2 \alpha)}{n - 1}. \quad (28.10)$$

По определению степень поляризации света (27.25)

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Решая совместно уравнения (28.6), (28.7) и (28.10), получаем для падающего света

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{1}{2} I_0 + I_1' - \frac{1}{2} I_0}{\frac{1}{2} I_0 + I_1' + \frac{1}{2} I_0} = \frac{I_1'}{I_0 + I_1'} = \frac{I_1'}{\frac{2I_1'(1 - n \cos^2 \alpha)}{n - 1} + I_1'} \\ &= \frac{n - 1}{1 - n \cos 2\alpha} = 0,8. \end{aligned}$$

28.2. Интерференция плоскополяризованного света.

При падении естественного света на анизотропный кристалл из-за явления двойного лучепреломления световой луч разделяется на два луча — обыкновенный o и необыкновенный e . В общем случае эти лучи приобретают оптическую разность хода Δ и соответствующую ей разность фаз δ , но интерферировать не могут, так как содержат колебания, принадлежащие разным цугам волн, испускаемых отдельными атомами.

Иначе обстоит дело при падении плоскополяризованного света на анизотропный кристалл. Луч также делится на два, но уже когерент-

ных луча — o и e . Плоскости колебаний у них взаимно перпендикулярны. Они могут интерферировать, но при условии, что плоскости колебаний у них совпадают.

Итак, для наблюдения интерференции плоскополяризованного света нужно провести следующий опыт (рис. 28.8, а):

1) на пути луча естественного света поставить первый поляризатор P и с его помощью получить плоскополяризованный свет;

2) далее на пути уже плоскополяризованного света с напряженностью \vec{E} поставить кристаллическую пластинку для деления одного луча на два — o и e .

Из-за разной скорости распространения в кристалле лучи o и e приобретают разность фаз δ ;

3) наконец, после кристаллической пластинки на пути лучей o и e нужно поставить второй поляризатор P' для сведения колебаний этих лучей в одну плоскость — плоскость второго поляризатора (рис. 28.8, б). Результат интерференции зависит от длины волны света, падающего на первый поляризатор, и проявляется в виде ослабления или усиления интенсивности света с напряженностью \vec{E}' .

Рассмотрим прохождение плоскополяризованного света через кристаллическую пластинку. На выходе из пластинки два когерентных световых колебания (лучи o и e) характеризуются соответственно напряженностями \vec{E}_o и \vec{E}_e . Колебания осуществляются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях согласно уравнениям

$$E_e = A_1 \cos \omega t; \quad (28.11)$$

$$E_o = A_2 \cos (\omega t + \delta), \quad (28.12)$$



Рис. 28.8

где ω — частота; A_1 и A_2 — амплитуды соответствующих колебаний. Результирующая напряженность является суммой напряженностей \vec{E}_o и \vec{E}_e . (рис. 28.9). Угол φ между направлениями векторов \vec{E} и \vec{E}_e определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_o}{E_e} = \frac{A_2 \cos(\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t}.$$

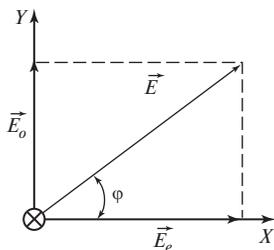


Рис. 28.9

При условии, что амплитуды колебаний равны $A_1 = A_2$ и разность фаз $\delta = \pm \pi/2$, $\operatorname{tg} \varphi = \pm \operatorname{tg} \omega t$, или $\varphi = \pm \omega t$. Направление распространения света — от «нас», в плоскость чертежа (рис. 28.9).

Это означает, что плоскость колебаний результирующего вектора \vec{E} поворачивается вокруг направления луча с угловой скоростью, равной частоте колебания ω . Имея ввиду этот поворот вектора \vec{E} , принято говорить об эллиптической поляризации световой волны или поляризации по кругу, а если поворот отсутствует, говорят о плоскополяризованном свете. Сложим два колебания с напряженностями \vec{E}_o и \vec{E}_e . Для упрощенного анализа и более наглядного представления окончательных формул обозначим: $E_e = x$; $E_o = y$; $A_1 = a$; $A_2 = b$. С учетом приведенных обозначений перепишем уравнения (28.11) и (28.12) в виде

$$x = a \cos \omega t; \quad (28.13)$$

$$y = b \cos(\omega t + \delta). \quad (28.14)$$

Из уравнения (28.13) найдем:

$$\cos \omega t = x/a. \quad (28.15)$$

Возведем в квадрат левую и правую часть уравнения (28.15): $\cos^2 \omega t = x^2/a^2$, или

$$1 - \sin^2 \omega t = x^2/a^2,$$

отсюда

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - x^2/a^2}. \quad (28.16)$$

Из уравнения (28.14) имеем $\cos(\omega t + \delta) = y/b$ или $\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta = y/b$.

С учетом уравнений (28.15) и (28.16) получим

$$\frac{x}{a} \cos \delta \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \delta = \frac{y}{b}. \quad (28.17)$$

Преобразуем уравнение (28.17) к виду

$$\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} \cos \delta + \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \delta = \sin^2 \delta - \sin^2 \delta \frac{x^2}{a^2},$$

или

$$\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} \cos \delta + \frac{x^2}{a^2} = \sin^2 \delta. \quad (28.18)$$

Если разность фаз $\delta = \pm \pi/2$, то уравнение (28.18) преобразуется в уравнение эллипса

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (28.19)$$

и свет будет эллиптически поляризован (конец вектора \vec{E} описывает эллипс).

При $a = b$ уравнение (28.19) станет уравнением окружности, и, следовательно, свет будет поляризован по кругу (конец вектора \vec{E} описывает окружность). Если $\delta = 0$ и $\delta = \delta = \pm \pi$, уравнение (28.18) преобразуется в уравнение прямой линии:

$$\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} + \frac{x^2}{a^2} = 0,$$

или

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0, \quad \text{откуда } y = \frac{b}{a} x.$$

Следовательно, результирующее колебание совершается в фиксированном направлении — волна называется плоскополяризованной.

Напомним еще раз, что $x = E_e$; $y = E_o$; $a = A_1$; $b = A_2$.

Таким образом, после кристаллической пластинки свет будет в общем случае эллиптически поляризован, но в частных случаях, как описано выше, будет либо плоскополяризован, либо поляризован по кругу.

Вновь вернемся к опыту по наблюдению интерференции поляризованного света (см. рис. 28.8, а).

Предположим, что плоскости поляризаторов P и P' совпадают («параллельны»), а угол ϕ между плоскостью поляризатора P и опти-

ческой осью OO' кристаллической пластинки равен $\varphi = \pi/4$. Тогда на выходе из пластинки два взаимно перпендикулярных вектора \vec{E}_o и \vec{E}_e образуют стороны прямоугольника, в котором $|\vec{E}|$ является диагональю (рис. 28.10). Из рис. 28.10 следует, что

$$E_o = E_e = E \cos \frac{\pi}{4} = \frac{E\sqrt{2}}{2}, \quad (28.20)$$

где E — амплитуда плоскополяризованной волны, вышедшей из первого поляризатора. Через второй поляризатор P' пройдут составляющие векторов \vec{E}_o и \vec{E}_e вдоль плоскости поляризатора P' :

$$E'_o = E_o \cos \frac{\pi}{4};$$

$$E'_e = E_e \cos \frac{\pi}{4}.$$

С учетом уравнения (28.20) получим:

$$E'_o = \frac{E}{2} \quad \text{и} \quad E'_e = \frac{E}{2}. \quad (28.21)$$

Графический метод сложения амплитуд (рис. 28.11) приводит к следующему выражению амплитуды E_{\parallel} результирующей волны, прошедшей поляризатор P' для случая «параллельных» поляризаторов:

$$E_{\parallel}^2 = E_o'^2 + E_e'^2 - 2E_o'E_e' \cos(180^\circ - \delta) = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E_o'E_e' \cos \delta.$$

Принимая во внимание соотношения (28.21), получаем:

$$E_{\parallel}^2 = \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{2} E^2 \cos \delta = \frac{1}{2} E^2 (1 + \cos \delta) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

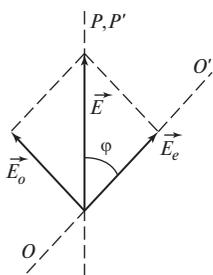


Рис. 28.10

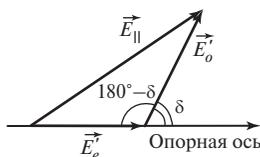


Рис. 28.11

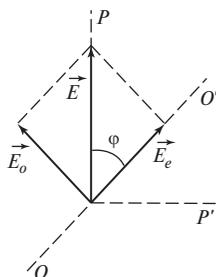


Рис. 28.12

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому

$$I'_{\parallel} = I \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (28.22)$$

При поляризаторах P и P' , расположенных так, что их плоскости пропускания P и P' взаимно перпендикулярны, («скрещенных» поляризаторах) (рис. 28.12) проекции векторов \vec{E}_o и \vec{E}_e на направление P' имеют разные знаки. Это означает, что в дополнении к разности фаз δ между колебаниями E'_o и E'_e возникает дополнительная разность фаз, равная π . И амплитуда результирующей волны E_{\perp} , прошедшей второй поляризатор, определится из соотношения

$$E_{\perp}^2 = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E_o'E_e' \cos(\delta + \pi).$$

Положим, что в этом случае также (рис. 28.12) $E_o = E_e = E \cos \frac{\pi}{4} = E \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $E_o' = E_o \cos \frac{\pi}{4}$; $E_e' = E_e \cos \frac{\pi}{4}$.

Тогда

$$E_{\perp}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2 \cos(\delta + \pi) = \frac{1}{2}E^2(1 - \cos \delta) = E^2 \sin^2 \frac{\delta}{2},$$

или

$$I'_{\perp} = I \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (28.23)$$

Таким образом, интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего второй поляризатор, зависит от разности фаз колебаний в обыкновенном и необыкновенном лучах. Из формул (28.22) и (28.23) следует, что интенсивности I'_{\parallel} и I'_{\perp} оказываются «дополнительными», так как в сумме они дают интенсивность I . В частности, при $\delta = 2m\pi$, где $m = 1, 2, 3, \dots$, интенсивность I'_{\parallel} будет равна I , а интенсивность I'_{\perp} обратится в нуль. При $\delta = (2m + 1)\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, интенсивность I'_{\parallel} будет равна нулю, а интенсивность I'_{\perp} достигнет значения I .

Разность фаз δ и оптическая разность хода Δ лучей o и e на выходе из кристаллической пластинки связаны соотношением

$$\delta = 2\pi\Delta/\lambda, \quad (28.24)$$

где λ — длина световой волны в вакууме, причем $\Delta = (n_o - n_e)d$, где, в свою очередь, n_o и n_e — соответственно показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, а d — толщина пластинки.

Вырезанная параллельно оптической оси OO' пластинка (см. рис. 28.8, а), для которой

$$(n_o - n_e)d = m\lambda + \lambda/4 \quad (28.25)$$

(здесь $m = 0, 1, 2, \dots$), называется *пластинкой в четверть волны*. При прохождении через такую пластинку лучи o и e приобретают разность фаз $\delta = \pi/2$.

Пластинка, для которой

$$(n_o - n_e)d = m\lambda + \lambda/2, \quad (28.26)$$

называется *пластинкой в полволны* и т.д.

Напоминаем, что для отрицательного кристалла $n_o > n_e$, а для положительного — наоборот: $n_e > n_o$.

Пример 28.4. Кварцевую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, поместили между двумя скрещенными поляризаторами. Угол между плоскостями пропускания поляризаторов и оптической осью пластинки $\varphi = 45^\circ$. Толщина пластинки $d = 0,50$ мм. При каких длинах волн в интервале $\lambda' \div \lambda'' = 0,50 \div 0,60$ мкм интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота второго поляризатора (см. рис. 28.8)? Разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей в этом интервале длин волн $n_e - n_o = 0,0090$.

По условию задачи интенсивность света, прошедшего через систему поляризатор — пластинка — поляризатор, не зависит от угла поворота второго поляризатора. Поэтому при любых углах поворота

$$I'_{\parallel} = I'_{\perp}. \text{ Но } I'_{\parallel} = I \cos^2 \frac{\delta}{2} \text{ (см. (28.22)), } I'_{\perp} = I \sin^2 \frac{\delta}{2} \text{ (см. (28.23)),}$$

поэтому $\cos^2 \frac{\delta}{2} = \sin^2 \frac{\delta}{2}$. Это равенство возможно, если

$$\frac{\delta}{2} = (2m + 1) \frac{\pi}{4}, \quad \text{или} \quad \delta = (2m + 1) \frac{\pi}{2},$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$. Разность фаз δ и оптическая разность хода Δ связаны соотношением $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$, где $\Delta = (n_e - n_o)d$. Откуда

$$\lambda = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\delta} = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{(2m + 1) \frac{\pi}{2}} = \frac{4(n_e - n_o)d}{2m + 1}.$$

При значениях $m_1 = 15$, $m_2 = 16$, $m_3 = 17$ соответственно $\lambda = 0,58$ мкм, $\lambda = 0,54$ мкм, $\lambda = 0,51$ мкм, что отвечает условию задачи.

Пример 28.5. Белый естественный свет падает на систему из двух скрещенных поляризаторов, между которыми находится кварцевая пластинка толщиной $d = 1,5$ мм, вырезанная параллельно оптической оси (см. рис. 28.8). Ось пластинки составляет угол $\varphi = 45^\circ$ с плоскостями пропускания поляризаторов. Прошедший через эту систему свет разложили в спектр. Сколько темных полос будет наблюдаться в интервале длин $0,55 — 0,66$ мкм? Разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей в этом интервале длин волн равна $0,0090$.

Для скрещенных поляризаторов $I'_\perp = I \sin^2 \frac{\delta}{2}$. Если $\delta = (2m + 1)\pi$, то интенсивность света I_\perp , прошедшего через второй поляризатор, максимальна при значениях $m = 0, 1, 2, \dots$. Но $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$, где $\Delta = (n_e - n_o)d$. Поэтому

$$(2m + 1)\pi = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\lambda},$$

отсюда:

$$\lambda = \frac{2(n_e - n_o)d}{2m + 1}.$$

По этой формуле нетрудно подсчитать, что значениям $m_1 = 20$, $m_2 = 21$, $m_3 = 22$, $m_4 = 23$, и $m_5 = 25$ соответствуют длины волн, лежащие в диапазоне от $0,55$ до $0,66$ мкм и отвечающие максимумам интерференционной картины: $\lambda_1 = 0,66$ мкм, $\lambda_2 = 0,63$ мкм, $\lambda_3 = 0,60$ мкм, $\lambda_4 = 0,57$ мкм и $\lambda_5 = 0,55$ мкм. Таким образом, в интерференционной картине в указанном интервале длин волн между пятью максимумами присутствуют четыре минимума (четыре темные полосы ($k = 4$)). Напомним, что наблюдение интерференционной картины стало возможным после разложения света вышедшего из второго поляризатора, в спектр.

Пример 28.6. Кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, помещена между двумя скрещенными поляризаторами так, что ее оптическая ось составляет угол 45° с плоскостями пропускания поляризаторов (см. рис. 28.8). При какой минимальной толщине пластинки свет с $\lambda_1 = 643$ нм будет проходить через эту систему с максимальной интенсивностью, а свет с $\lambda_2 = 564$ нм

будет сильно ослаблен? Разность показателей преломления $n_e - n_o = 0,0090$.

Интенсивность света, вышедшего из системы пластинка — скрещенные поляризаторы, определяется формулой $I'_\perp = I \sin^2 \frac{\delta}{2}$. Интенсивность I_\perp минимальна, если $\delta = 2m\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, и максимальна, если $\delta = (2m + 1)\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Так как $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$, где $\Delta = (n_e - n_o)d$, то при сильном ослаблении света с длиной волны λ_2 :

$$2m\pi = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\lambda_2},$$

или

$$d = \frac{m\lambda_2}{n_e - n_o}. \quad (28.27)$$

Если свет с длиной волны λ_1 при прохождении второго поляризатора остается максимально интенсивным, то

$$(2m + 1)\pi = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\lambda_1},$$

или

$$d = \frac{(2m + 1)\lambda_1}{2(n_e - n_o)}. \quad (28.28)$$

Результаты расчета значений d по формулам (28.27) и (28.28) для различных значений m приведены в табл. 28.1, 28.2.

Анализ данных табл. 28.1 и 28.2 показывает, что свет с длиной волны λ_2 испытывает сильное ослабление, а свет с длиной волны λ_1 максимально интенсивен при толщине пластинки $d_{\min} \approx 0,250$ мм.

Таблица 28.1

Длина волны $\lambda_2 = 564$ нм	
m	d , мм
1	0,063
2	0,125
3	0,188
4	0,251
5	0,313
6	0,392

Таблица 28.2

Длина волны $\lambda_1 = 643$ нм	
m	d , мм
0	0,036
1	0,107
2	0,178
3	0,250
4	0,322
5	0,393

Пример 28.7. Кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, имеет толщину 0,25 мм и служит пластинкой в четверть волны для монохроматической световой волны ($\lambda = 0,53$ мкм). Для каких еще длин волн в области видимого спектра она будет также пластинкой в четверть волны? Разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей в интервале длин волн области видимого спектра $n_e - n_o = 0,0090$.

Для пластинки в четверть волны справедливо соотношение (см. (28.25)):

$$(n_e - n_o)d = m\lambda + \lambda/4,$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, откуда:

$$m_1 = \frac{(n_e - n_o)d}{\lambda} - \frac{1}{4} \approx 4.$$

Такое значение $m_1 = 4$ соответствует длине волны $\lambda_1 = 0,53$ мкм, принадлежащей видимому диапазону длин волн 0,40—0,75 мкм.

Для поиска других длин волн этого же диапазона в формулу (28.25), записанную в виде

$$\lambda = \frac{(n_e - n_o)d}{m + 1/4},$$

подставим соседние с $m_1 = 4$ значения $m_2 = 3$ и $m_3 = 5$. Им отвечают соответственно значения длин волн $\lambda_2 = 0,43$ мкм и $\lambda_3 = 0,69$ мкм. Понятно, что для длин волн λ_2 и λ_3 рассматриваемая пластинка является пластинкой в четверть волны.

28.3. Дисперсия

Явление *дисперсии* заключается в различии значений показателя преломления вещества для различных длин волн. Например, в классическом опыте по преломлению солнечных лучей в стеклянной призме лучи разных цветов (длин волн) из-за дисперсии стекла преломляются на разные углы.

В подавляющем большинстве экспериментов показатель преломления растет с ростом частоты (или, что то же самое, падает с ростом длины волны). Такое поведение показателя преломления называется *нормальной дисперсией*. Например, в опыте с призмой мы наблюдаем нормальную дисперсию. В более тонких экспериментах в очень узких интервалах частот, соответствующих так называемым линиям поглощения, можно наблюдать и *аномальную дисперсию*, т.е. уменьшение показателя преломления с ростом частоты (увеличение с ростом длины волны).

Качественно понять причину дисперсии можно на основе простой классической модели, в которой атом вещества рассматривается как обычный пружинный маятник. Маленький шарик массой m и зарядом q закреплен на пружинке жесткостью k (рис. 28.13). Под действием переменного электрического поля световой волны E шарик совершает вынужденные колебания с частотой волны ω . Кроме электрической силы, на шарик действует сила трения $F_{\text{тр}}$ пропорциональная скорости шарика v , так что $F_{\text{тр}} = -\beta v$.

Модель отражает некоторые реальные свойства атома вещества. Дипольный момент атома p в данной модели принимается равным qx , и, таким образом, заряд q и смещение x отражают распределение заряда в атоме. Если дипольный момент атома пропорционален внешнему полю E , то это эквивалентно действию на заряд возвращающей упругой силы: $F_{\text{упр}} = -kx$. Далее, двигаясь с ускорением, заряд теряет энергию на излучение, что в модели отражено введением силы трения («радиационное трение»). Феноменологический коэффициент трения β подбирается так, чтобы средние за период потери энергии на излучение реального атома соответствовали рассчитанным из модели. Наконец, если под веществом понимать сильно разреженный газ, то это позволяет не учитывать взаимодействие атома с «соседями», что значительно упрощает рассмотрение.

Перейдем к математическому описанию явления дисперсии. Рассмотрим плоскополяризованную монохроматическую волну, вектор \vec{E} которой параллелен оси пружинки. Уравнение движения шарика (в проекции на ось пружинки) будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + qE_0 \cos \omega t;$$

или, что то же самое,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma\dot{x} = \frac{qE_0}{m} \cos \omega t, \quad (28.29)$$

где $\omega_0^2 = k/m$, $\gamma = \beta/m$.

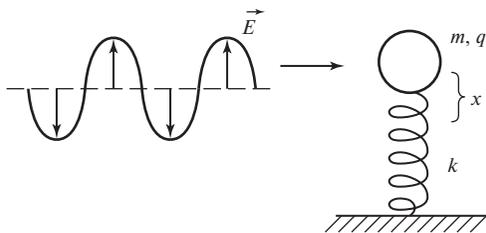


Рис. 28.13

Умножая последнее уравнение на $n_0 q$ (n_0 — концентрация атомов) и учитывая, что *поляризация среды* (дипольный момент элемента объема) $P = n_0 p$, получаем

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P + \gamma \dot{P} = \frac{n_0 q^2}{m} E_0 \cos \omega t. \quad (28.30)$$

Рассмотрим решения данного уравнения в предельных случаях.

1. Возьмем область частот ω , далеких от ω_0 . Коэффициент γ (он имеет размерность частоты), определяющий «радиационное трение», очень мал ($\gamma \ll \omega_0$). Реально $\gamma \ll |\omega - \omega_0|$, и, за исключением узкой области резонанса, слагаемым с γ вообще можно пренебречь. Уравнение (28.30) примет вид

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P = \frac{n_0 q^2}{m} E_0 \cos \omega t,$$

а его решение, как легко проверить, $P = P_0 \cos \omega t$. Перегруппировав сомножители, получаем

$$\begin{aligned} P_0 \cos \omega t = P &= \frac{n_0 q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos \omega t = \\ &= \varepsilon_0 \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} E = \varepsilon_0 \chi(\omega) E, \end{aligned} \quad (28.31)$$

где

$$\chi(\omega) = \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (28.32)$$

— *восприимчивость*, $\omega_p^2 \equiv n_0 q^2 / (\varepsilon_0 m)$ — некая константа, называемая квадратом «*плазменной частоты*». Физический смысл ω_p будет рассмотрен далее. Из (28.32) имеем (за исключением частот близких к ω_0) для показателя преломления

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{\varepsilon_0 n_0 q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad (28.33)$$

$$\gamma \ll \left| \omega_0^2 - \omega^2 \right|.$$

При извлечении квадратного корня из уравнения (28.33) для получения $n(\omega)$ можно ограничиться линейным членом разложения Тейлора, так как значение $\varepsilon(\omega)$ для разреженных газов очень близко к единице:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \chi} \approx 1 + \frac{\chi}{2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)};$$

$$\gamma \ll \left| \omega_0^2 - \omega^2 \right|.$$

2. Вернемся к исходному уравнению (28.30) и рассмотрим случай резонанса $\omega = \omega_0$. В силу уравнения колебаний $\ddot{P} + \omega_0^2 P = 0$ первые два слагаемых сокращаются, и мы имеем:

$$\gamma \dot{P} = \frac{n_0 q^2}{m} E_0 \cos \omega_0 t = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_0 \cos \omega_0 t.$$

Непосредственным интегрированием получаем решение

$$P = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\gamma \omega_0} E_0 \sin \omega_0 t. \quad (28.34)$$

Как мы видим, колебания поляризации отстают по фазе от колебаний электрического поля на $\pi/2$ (разность фаз между $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$), и связь между P и E не может быть выражена соотношением $P(t) = \chi E(t)$. Результат можно (хоть и не слишком убедительно) интерпретировать так: в резонансе поляризация не имеет составляющей, изменяющейся во времени по закону изменения внешнего поля и, следовательно, при $\omega = \omega_0$ следует положить $\chi = 0$, $\varepsilon = 1$ и $n = 1$ (к этому же «толкают» и соображения «физической непрерывности» при переходе $\chi(\omega)$ через $\omega = \omega_0$). Таким образом, вблизи резонансной частоты мы получаем узкую ($\Delta\omega \sim \gamma$) область аномальной дисперсии.

Следует подчеркнуть, что $\chi(\omega_0) = 0$ не означает равенства нулю амплитуды колебаний поляризации. Напротив, из-за малого значения γ в знаменателе (28.34) амплитуда этих колебаний именно в резонансе имеет резкий максимум. В этом определенным дефект излагаемой элементарной теории: соотношение $P = \chi E$ не в полной мере выражает связь между P и E . Дефект устраняется при введении комплексной восприимчивости (см. ниже).

Графики $n(\omega)$ и $n(\lambda)$ с учетом $n(\omega_0) = 1$ приведены на рис. 28.14 для удобства в несколько утрированном виде: область аномальной диспер-

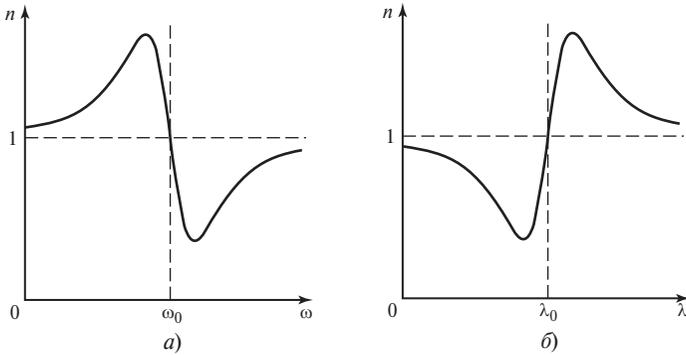


Рис. 28.14

сии показана преувеличенно широкой (как если бы $\gamma \sim \omega_0$). На самом деле область аномальной дисперсии столь узка, что ее наблюдение представляет собой сложную экспериментальную задачу.

28.4. Поглощение света

Рассмотрим мощность N , теряемую световой волной при раскачивании заряда q . По определению мгновенной мощности $N = Fv$, в нашем случае $N = qE\dot{x}$. Начнем опять с частот, далеких от резонансной ($|\omega - \omega_0| \ll \gamma$). Так как $x = P/(n_0q)$, то, используя (28.31), имеем

$$\dot{x} = \frac{\dot{P}}{n_0q} = \frac{\varepsilon_0\chi}{n_0q} \dot{E} = -\frac{\varepsilon_0\chi\omega}{n_0q} E_0 \sin \omega t = -v_0 \sin \omega t.$$

Тогда средняя мощность $\langle N \rangle$ за период $T \equiv 2\pi/\omega$ равна

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T N dt = -\frac{qE_0v_0}{T} \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = \\ &= -\frac{qE_0v_0}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0. \end{aligned} \quad (28.35)$$

Таким образом, вдали от резонансной частоты рассеяния мощности световой волны не происходит, и среда является прозрачной.

Теперь рассмотрим случай резонанса $\omega = \omega_0$. Скорость \dot{x} проще всего выразить непосредственно из (28.29), с учетом того что при $\omega = \omega_0$ первые два слагаемых сокращаются:

$$\dot{x} = \frac{qE_0}{\gamma m} \cos \omega_0 t = v_0 \cos \omega_0 t;$$

$$v_0 = qE_0/(m\gamma);$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T N dt = \frac{qE_0 v_0}{T} \int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt = qE_0 v_0 \frac{1}{2} > 0. \quad (28.36)$$

Учитывая, что величина γ , стоящая в знаменателе выражения v_0 , мала, заключаем, что в области частот, близких к резонансной, должно иметь место сильное поглощение света. Указанное поглощение действительно наблюдается экспериментально, а соответствующий интервал частот (его ширина $\Delta\omega \sim \gamma$) вследствие его узости называется *линией поглощения*.

Если в разреженном газе имеется несколько сортов атомов с различными резонансными частотами ω_{0i} (и различными постоянными затухания γ_i), то изложенную теорию легко модифицировать: следует ввести относительные концентрации $f_i \equiv n_{0i}/n_0$ каждого сорта атомов i (очевидно $\sum f_i = 1$). Тогда, в силу отсутствия взаимодействия между атомами, выражение (28.33) примет вид:

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \omega_p^2 \sum \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}; \quad (28.37)$$

$$\gamma_i \ll |\omega_{0i}^2 - \omega^2|.$$

Примерный вид кривой $n(\omega)$, соответствующей формуле (28.37), показан на рис. 28.15. Смесь атомов будет иметь несколько линий поглощения шириной порядка γ_i на частотах ω_{0i} .

С развитием физики выяснилось, что каждый атом имеет несколько линий поглощения, причем частоты ω_{0i} уникальны для

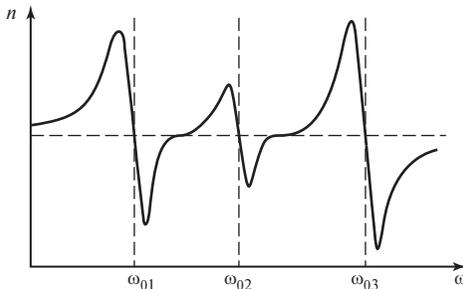


Рис. 28.15

каждого химического элемента. Частоты ω_{0i} лучше называть не «резонансными», а просто частотами поглощения элемента. Величины же f_i называют не «долей атомов в смеси», а силами осцилляторов: они показывают относительное участие этих «осцилляторов» в дисперсии. Отметим, что изучая спектр поглощения неизвестного газообразного вещества, можно судить об элементном составе последнего.

При распространении плоской волны в однородной поглощающей среде интенсивность света I уменьшается по экспоненциальному закону. Причина в том, что потери мощности световой волны при взаимодействии с атомом среды пропорциональны интенсивности волны. Это видно, например, из формулы (28.36) для мгновенной мощности N , отдаваемой в резонансе. Запишем (28.36) в эквивалентном виде:

$$N = Fv = qE_0 \cos \omega t \frac{qE_0 \cos \omega t}{m\gamma} = \frac{q^2 E_0^2}{m\gamma} \cos^2 \omega t = \frac{q^2 E^2}{m\gamma} \sim E^2 \sim I.$$

Кроме того, потери мощности в слое вещества толщиной dz , расположенном перпендикулярно волновому вектору, пропорциональны числу атомов в слое, т.е. толщине dz . Обозначив общий коэффициент пропорциональности через α , получим уравнение $dI = -\alpha I dz$, интегрирование которого приводит к выражению

$$I = I_0 e^{-\alpha z}, \quad (28.38)$$

где I_0 — интенсивность света на входе в поглощающий слой; z — толщина слоя; I — интенсивность на выходе из слоя. Коэффициент α называют **коэффициентом затухания** волны, он зависит от частоты. Соотношение (28.38) носит название **закона Бугера**.

Как отмечалось выше, связь $P = \chi E$ не дает полного описания поведения $P(t)$ при заданном $E(t)$. Полное описание опирается на метод комплексных экспонент при использовании комплексной восприимчивости. Данный метод часто применяется в физике, например, при описании цепей переменного тока, содержащих индуктивности и емкости. Кратко суть метода в следующем. Вместо записи $\cos \omega t$ пишут $e^{i\omega t}$, подразумевая действительную часть последнего выражения. Доумножение экспоненты $e^{i\omega t}$ на любое комплексное число $\underline{Z} = a + ib$ приводит к изменению амплитуды и фазы. Действительно, по формуле Эйлера $\underline{Z}e^{i\omega t} = Z_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = Z_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$, где $Z_0 = (a^2 + b^2)^{1/2}$, $\varphi = \text{arctg}(b/a)$.

Применим метод комплексных экспонент к решению уравнения (28.30). Запишем электрическое поле волны и поляризацию среды соответственно как $E = E_0 e^{i\omega t}$ и $P = P_0 e^{i\omega t}$ и подставим в (28.30). Тогда вместо (28.31) будем иметь:

$$\begin{aligned} P_0 e^{i\omega t} = P &= \frac{n_0 q^2 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} E_0 e^{i\omega t} = \\ &= \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} E = \varepsilon_0 \underline{\chi}(\omega) E, \end{aligned} \quad (28.39)$$

где $\underline{\chi} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$ — восприимчивость, но теперь уже комплексная. Разделяя действительную и мнимую части $\underline{\chi}$, имеем:

$$\begin{aligned} \underline{\chi} &= \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} = \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} - \\ &- i \frac{\omega_p^2 \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} = \chi' + i\chi'', \end{aligned} \quad (28.40)$$

где $\chi' = \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$ и $\chi'' = - \frac{\omega_p^2 \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$.

Легко видеть, что вдали от резонанса ($|\omega - \omega_0| \gg \gamma$) действительная часть χ' совпадает с нашим выражением (28.32) для χ ; в точке резонанса $\chi'(\omega_0) = 0$, а график $\chi'(\omega)$ имеет вид, представленный на рис. 28.16, а. В то же время график $|\chi''(\omega)|$ имеет вид кривой поглощения (рис. 28.16, б).

Интересно отметить, что выражения для χ' и χ'' строятся из одних и тех же констант — ω_0 , ω_p и γ , поэтому, зная выражение для χ' , можно однозначно восстановить χ'' , и наоборот. Можно доказать, что этот факт не является особенностью конкретной модели среды, а опирается на фундаментальный принцип причинности. Дисперсия и поглощение волн в среде всегда связаны между собой.

При использовании комплексной восприимчивости комплексными оказываются также диэлектрическая проницаемость $\underline{\varepsilon} = (1 + \chi') +$

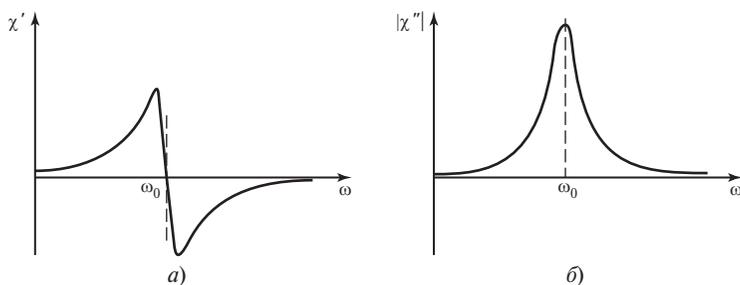


Рис. 28. 16

$+i\chi'' = \varepsilon' + i\varepsilon''$ и показатель преломления $\underline{n} = (\varepsilon' + i\varepsilon'')^{1/2} = n' - in''$ (для удобства принято писать знак « \leftarrow » перед in'' , чтобы показатель n'' получался положительным). Физический смысл n' и n'' легко понять, записав уравнение плоской волны в виде комплексной экспоненты: $\underline{E} = E_0 e^{i\omega(t - z/v)}$ (монохроматическая волна, распространяющаяся со скоростью v вдоль оси z). Так как v по определению c/n , то

$$E_0 e^{i\omega(t - z/v)} = E_0 e^{i\omega(t - zn/c)} = E_0 e^{-\omega n''z/c} e^{i\omega(t - zn'/c)}. \quad (28.41)$$

Мы видим, что амплитуда волны экспоненциально убывает с ростом z . Учитывая, что интенсивность I пропорциональна квадрату амплитуды, получаем известный нам закон Бугера: $I = I_0 e^{-\alpha z}$, где коэффициент затухания $\alpha = 2\omega n''/c$. Кроме того, при распространении света в среде его фазовая скорость v уменьшается в n' раз.

28.5. Волны в веществе как результат интерференции первичной и вторичных волн

Согласно полученным результатам, скорость света (как мы увидим ниже, лучше говорить: «фазовая скорость») может принимать значения как меньше, так и больше фундаментальной константы c . Это может вызвать недоумение и вопросы. Например. Как $v > c$ согласуется с теорией относительности, согласно которой скорость c — максимальная из возможных в природе? Можно ли все-таки передавать сверхсветовые сигналы? Более детальное, чем это было сделано выше, рассмотрение явления дисперсии приводит к выводам, позволяющим ответить на подобные вопросы. Суть выводов в следующем.

1. Исходная («первичная») световая волна, проходя через среду, «раскачивает» атомы, заставляя их излучать (излучающие атомы назовем вторичными источниками).

2. Волна, распространяющаяся в среде, есть результат интерференции исходной волны и волн от вторичных источников.

3. И первичная, и вторичные волны распространяются с одной и той же фундаментальной скоростью c .

4. Результат интерференции первичной и вторичных волн может как отставать по фазе от фазы первичной волны, так и опережать ее (в первом случае говорят, что $n > 1$, во втором — что $n < 1$).

Перечисленные выводы снимают вопросы о противоречии теории дисперсии и теории относительности и о возможности передачи сверхсветовых сигналов, поэтому стоит остановиться на них подробнее.

Сама по себе задача об интерференции первичной и вторичных волн чрезвычайно сложна (кроме поля «первичной» волны на атомы среды воздействуют вторичные волны «соседей»). Тем не менее сам механизм «замедления» или «ускорения» света средой можно прояснить из простой модели, которую мы сейчас рассмотрим.

Пусть на пути первичной волны (перпендикулярно направлению ее распространения) расположен тонкий плоский слой атомов, причем атомы распределены в плоскости равномерно и достаточно плотно (рис. 28.17). Тогда результат интерференции волн от вторичных источников в точке P за экраном можно найти методом векторных амплитуд (*спиралей Корню*), как это обычно делается при рассмотрении дифракции Френеля. В отличие от дифракции Френеля, «наши» источники являются не мнимыми, а реальными, излучающими по законам электродинамики. Согласно последним, излучение заряда происходит в противофазе с его ускорением a . Для нашей модели гармонических колебаний заряда на пружинке имеем (будем отслеживать только фазу колебаний): $-a = -\ddot{x} \sim x \sim p \sim P$. Согласно (28.32) $\chi > 0$ для $\omega < \omega_0$ и $\chi < 0$ для $\omega > \omega_0$, что означает, что при $\omega < \omega_0$ излучение происходит в одной фазе с первичной волной, а при

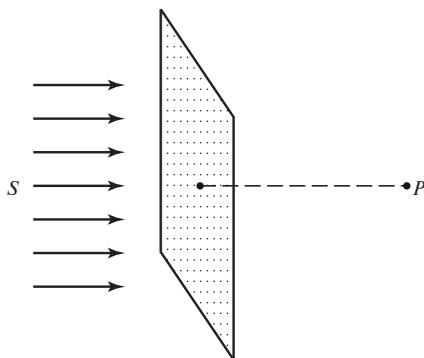


Рис. 28.17

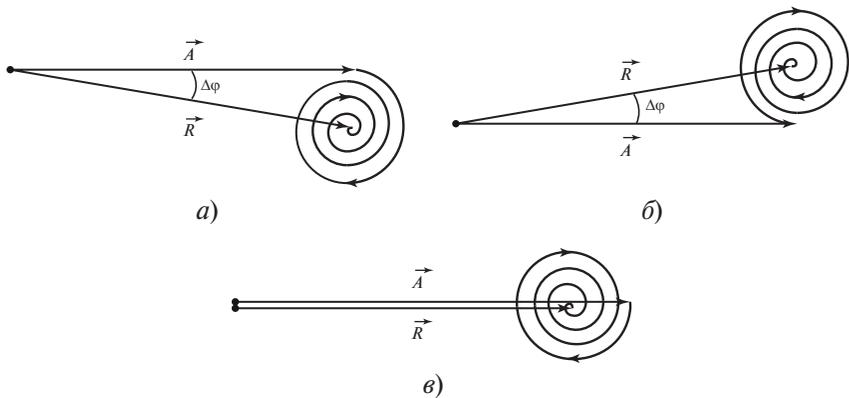


Рис. 28.18

$\omega > \omega_0$ — в противофазе, т.е. с отставанием на π . Наконец, согласно (28.34), при $\omega = \omega_0$ излучение происходит с отставанием на $\pi/2$.

Теперь осталось нарисовать спирали Корню для каждого из случаев и сложить результирующее колебание от вторичных волн с колебанием первичной волны, изображенным на рис. 28.18, *a—v* стрелкой \vec{A} (если бы не было атомной плоскости, в точке *P* наблюдались бы только колебания \vec{A}). Как мы видим, влияние слоя атомов сводится к тому, что результирующее колебание (стрелка \vec{R}) либо (при $\omega < \omega_0$) слегка отстает по фазе от \vec{A} («замедление» $\Delta\varphi < 0$, $n > 1$, рис. 28.18, *a*), либо (при $\omega > \omega_0$) — опережает («ускорение» $\Delta\varphi > 0$, $n < 1$, рис. 28.18, *b*), либо (при $\omega = \omega_0$) фаза остается прежней ($\Delta\varphi = 0$, $n = 1$, рис. 28.18, *v*). Все это находится в качественном согласии с элементарной теорией дисперсии. В грубом приближении реальную среду можно представить как совокупность атомных слоев, каждый из которых «действует» аналогично рассмотренному.

28.6. Дисперсия в плазме

Плазмой называется состояние вещества с высокой концентрацией ионов и свободных (не связанных с атомами) электронов. Любой газ при достаточно высокой температуре является плазмой. Также, из-за наличия в металлах свободных электронов, говорят о плазме электронов проводимости.

Описанная выше элементарная теория дисперсии легко может быть обобщена на плазмы: и «газовую», и «металлическую». Для этого достаточно устремить жесткость k пружинки (связывающей электрон с атомом) к нулю. Соответственно ω_0 тоже будет равна нулю; кроме того, везде, за исключением мало нам сейчас интересной области нулевых частот (статического поля), можно пренебречь γ . Таким образом, вместо (28.32) и (28.33) восприимчивость и диэлектрическая проницаемость принимают вид:

$$\begin{aligned}\chi(\omega) &= -\omega_p^2/\omega^2; \\ \varepsilon(\omega) &= 1 - \omega_p^2/\omega^2.\end{aligned}\tag{28.42}$$

График $\varepsilon(\omega)$ приведен на рис. 28.19. Для $\omega > \omega_p$, $\varepsilon > 0$, плазма прозрачна, $n < 1$, имеет место нормальная дисперсия. Если $\omega < \omega_p$, то $\varepsilon < 0$ и показатель преломления оказывается чисто мнимым, что означает невозможность распространения света вглубь среды. В последнем легко убедиться, если использовать комплексные экспоненты. Подставляя в (28.41) $n' = 0$, имеем $\underline{E} = E_0 e^{-\omega n'' z/c} e^{i\omega t}$, т.е. выражение, не имеющее вид бегущей волны. Колебания быстро затухают с ростом z (на глубине примерно $c/(\omega n'')$, называемой толщиной *скин-слоя*), и такая среда является непрозрачной. Заметим, что затухание волн вглубь среды в данном случае не связано с диссипацией энергии: в выражения (28.42) вообще не входит γ (поэтому $\alpha = 2\omega n''/c$ лучше называть коэффициентом затухания, чем коэффициентом поглощения). Энергия просто уходит в отраженную волну — металлы хорошие отражатели света.

Интересно отметить, что «плазменную» формулу (28.42) можно получить и из формулы (28.33) (или ее обобщения (28.37)) для «связанных» зарядов: надо лишь сделать в (28.33) (или (28.37)) предель-

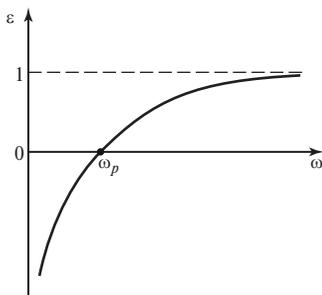


Рис. 28.19

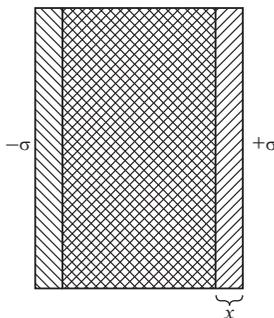


Рис. 28.20

ный переход $\omega \rightarrow \infty$. Это объясняет, в частности, почему на очень больших частотах ($\omega \gg \omega_p$) стирается различие между проводниками и диэлектриками, а диэлектрическая проницаемость всех сред имеет универсальный вид: $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$.

Из наших рассуждений осталось неясным, каким именно колебаниям соответствует *плазменная частота* ω_p . Оказывается, что плазменные колебания — это коллективные колебания всех отрицательных зарядов среды относительно положительных. Понять, как происходят плазменные колебания, можно на простом примере. Представим себе, что мы сместили весь электронный газ среды, как целое, на расстояние x относительно положительного фона неподвижных ионов (рис. 28.20). В результате на границах среды (для упрощения границы среды выбраны параллельными) возникает поверхностная плотность заряда σ . В разд. III было показано, что σ равна нормальной к границе среды компоненты поляризации. В нашем случае можно написать $\sigma = P$. Поверхностная плотность зарядов создает однородное поле $E = \sigma/\varepsilon_0$ (как в плоском конденсаторе), которое действует на каждый смещенный из равновесия заряд *возвращающей* силой qE , что и приводит к колебаниям. Действительно, доумножая уравнение движения одного заряда

$$m\ddot{x} = -q \frac{P}{\varepsilon_0}$$

на заряд q и концентрацию n_0 :

$$n_0 q m \ddot{x} = m \ddot{P} = - \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0} P; \quad \ddot{P} = - \frac{n_0 q^2}{m \varepsilon_0} P,$$

приходим к уравнению колебаний:

$$\ddot{P} + \omega_p^2 P = 0,$$

где $\omega_p^2 = n_0 q^2 / (\varepsilon_0 m)$ — как раз то самое выражение, которое фигурировало у нас, начиная с формулы (28.32).

Для количественных оценок величины ω_p следует подставить вместо q и m соответственно заряд и массу электрона e и m_e . Подстановка концентрации электронов $n_0 \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, характерной для щелочных металлов, дает ω_p , соответствующую ультрафиолетовому диапазону спектра. Поэтому, например, щелочные металлы, непрозрачные в видимом диапазоне, становятся прозрачными для ультрафиолетовых лучей.

Приведем еще один пример явления, которое можно понять, опираясь на формулу (28.42) для диэлектрической проницаемости плазмы.

Пример 28.8. Отражение радиоволн ионосферой. *Ионосфера* — это ионизированный слой земной атмосферы, начинающийся с высоты примерно 60 км и простирающийся до 400 км над Землей. Оказывается, что, хотя концентрация свободных электронов в ионосфере колеблется с высотой в широких пределах (от 10^3 до 10^7 см $^{-3}$), к ионосфере для многих практических приложений вполне применима простая формула (28.42). Достаточно лишь ввести «эффективную» плазменную частоту. Формула (28.42) для $\varepsilon(\omega)$ соответственно примет вид:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \left(\omega_p^{\text{эф}} \right)^2 / \omega^2. \quad (28.43)$$

Расчет дает $\omega_p^{\text{эф}} \approx 13$ МГц ($\lambda \approx 23$ м) в дневное время и 4 МГц ($\lambda \approx 75$ м) в ночное время, что соответствует диапазону КВ (коротких волн). Зависимость $\omega_p^{\text{эф}}$ от времени суток связана с тем, что днем степень ионизации ионосферы солнечными лучами сильно возрастает (напомним, что ω_p пропорциональна квадратному корню из концентрации свободных электронов). Для длинных, средних, коротких и метровых волн (на последних работают FM радиостанции) $\omega < \omega_p^{\text{эф}}$, т.е. согласно (28.43) $\varepsilon < 0$. Эти радиоволны отражаются от ионосферы при любых углах падения (примерно, как свет от металлического зеркала), благодаря чему сигналы могут передаваться на расстояния во много раз превышающие расстояние прямой видимости. В то же время телевидение работает в сантиметровом и дециметровом диапазонах (так называемый УКВ — ультракоротковолновый — диапазон). Для телевизионных частот ионосфера прозрачна, так как $\omega > \omega_p^{\text{эф}}$. Поэтому для надежной трансляции необходимо, чтобы приемники (телевизионные антенны) находились в прямой видимости от передатчиков. Для увеличения зоны уверенного приема телепрограмм передающую антенну располагают как можно выше (например, высота Останкинской телебашни в Москве составляет 539 м), используют систему ретрансляторов, развивают спутниковое телевидение.

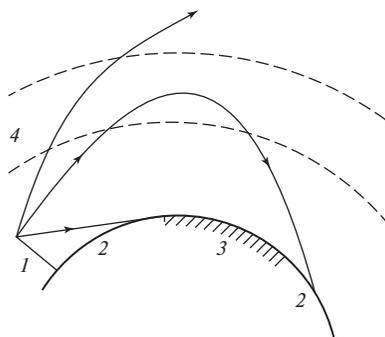


Рис. 28.21

Интересно, что для УКВ диапазона $\omega > \omega_p^{\text{эф}}$ имеет место соотношение $\varepsilon(\omega) < 1$ и соответственно $n = \sqrt{\varepsilon} < 1$. Поэтому вакуум (космос за ионосферой) оказывается средой оптически более плотной, чем ионосфера, а значит, при достаточно больших углах падения радиоволн на ионосферу должно иметь место полное внутреннее отражение. Данное явление действительно наблюдается: за пределами «зоны молчания» появляется зона уверенного приема УКВ сигнала (рис. 28.21), причем границы зон сильно перемещаются в течение суток (на рисунке: 1 — передающая антенна; 2 — зона приема; 3 — «зона молчания»; 4 — ионосфера).

28.7. Скорость передачи сигналов в среде с дисперсией

Прежде всего, обратим внимание, что с помощью привычной нам плоской монохроматической волны вида $A \cos \omega(t - x/v)$ мы не можем передать никакой информации — это просто бесконечная синусоида, «вечно» бегущая со скоростью v из минус бесконечности в плюс бесконечность. Строго говоря, монохроматическая волна — всего лишь удобная идеализация, таких волн вообще нет в природе. Для передачи какой-либо информации требуются волны более сложного вида, например последовательность всплесков, несущая информацию в двоичном коде («цифровой сигнал»). Можно показать, что для формирования «всплески» требуется «смешать» (наложить одно на другое) большое количество волн (их называют *спектральными составляющими сигнала* или *группой волн*) с очень близкими частотами. Существует закономерность: *чем короче сигнал, тем большее количество и из более широкого диапазона частот следует сме-*

шать волн (говорят: «короткие сигналы имеют широкий спектр частот»). В среде с дисперсией волны разной частоты из группы будут распространяться с разными скоростями, а сам сигнал, соответственно, по мере распространения, — менять форму. Поэтому требуется уточнить само понятие «скорость сигнала». Фундаментальные исследования на эту тему были проведены английским физиком Рэлеем.

В качестве характеристики скорости распространения группы волн, вслед за Рэлеем, вводят так называемую *групповую скорость* (будем обозначать ее u), которая по определению равна $u = d\omega/dk$.

Поясним смысл понятия групповой скорости на простейшем примере «группы» из двух волн с очень близкими частотами (ω и $\omega + d\omega$) и равными амплитудами A . Пусть частоте ω соответствует волновое число k , а частоте $\omega + d\omega$ — волновое число $k + dk$. Для сложения волн воспользуемся известной формулой тригонометрии $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, четностью косинуса и малостью $d\omega$ и dk . Итак, мы имеем:

$$\begin{aligned} & A \cos(\omega t - kx) + A \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = \\ & = 2A \cos\left(\frac{2\omega + d\omega}{2} t - \frac{2k + dk}{2} x\right) \cos\left(-\frac{d\omega}{2} t + \frac{dk}{2} x\right) \approx \\ & \approx 2A \cos\left(\frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x\right) \cos(\omega t - kx) = \\ & = 2A \cos\left[\frac{d\omega}{2} \left(t - \frac{x}{\frac{d\omega}{dk}}\right)\right] \cos\left\{\omega \left[t - \frac{x}{\left(\frac{\omega}{k}\right)}\right]\right\} = \\ & = 2A \cos\left[\frac{d\omega}{2} \left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)\right]. \end{aligned}$$

В последнем множителе полученного выражения мы узнаем обычную монохроматическую плоскую волну частотой ω , распространяющуюся с фазовой скоростью $v = \omega/k$. Предыдущие множители задают ее огибающую (или, как говорят, модуляцию (рис. 28.22)). Как видим, огибающая имеет низкую частоту $d\omega/2$ (частоту биений) и распространяется с групповой скоростью $u = d\omega/dk$. Можно показать, что при слабой дисперсии энергия вспышки распространяется с групповой скоростью.

До сих пор мы описывали дисперсию, задавая частотную зависимость показателя преломления или диэлектрической проницаемости.

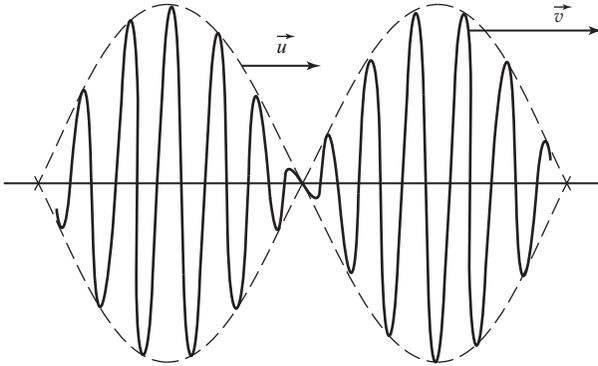


Рис. 28. 22

Часто бывает удобно (например, для расчета фазовой и групповой скоростей) перейти к другой форме записи — через зависимость частоты от волнового числа. Выражение вида $\omega = \omega(k)$ будем называть **законом дисперсии**. Такая запись представляет собой просто замену переменных; поэтому, она эквивалентна привычной $n = n(\omega)$. Действительно, по определению, $\omega = vk = \frac{c}{n(\omega)} k \Rightarrow \omega n(\omega) = ck$, т.е. $n(\omega)$ задает взаимно однозначное соответствие между ω и k (при использовании комплексного показателя преломления на место n следует поставить его действительную часть n').

В вакууме $n = 1$, поэтому $\omega = c(k)$, $v = \omega/k = c$, $u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(ck) = c$, т.е. фазовая скорость равна групповой и равна c .

При нормальной дисперсии групповая скорость всегда меньше фазовой. Действительно:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = v + \frac{dv}{d\omega} u;$$

$$u = \frac{v}{1 - dv/d\omega}.$$

Нормальная дисперсия означает, что n растет (соответственно, v падает) с ростом частоты, $dv/d\omega < 0$, отсюда $u < v$.

При аномальной дисперсии («внутри» линии поглощения) $dv/d\omega > 0$ и формально имеет место $u > v$ или даже, что бессмысленно, $u < 0$. Подробный анализ, однако, показывает (следует принять во внимание и сильное затухание, зависящее от частоты, меняющее спектральный состав волнового пакета), что физическая интерпретация

$d\omega/dk$ как скорости распространения энергии световой вспышки теряет силу.

Часто бывает необходимо записать связь между фазовой и групповой скоростями не через частоту, а через длину волны λ . Получим соответствующее соотношение:

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d}{dk} \frac{2\pi}{k} = \\ &= v + k \frac{dv}{d\lambda} \left(-\frac{2\pi}{k^2} \right) = v - \frac{2\pi}{k} \frac{dv}{d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \end{aligned}$$

Пример 28.9. Произведем расчет u и v на примере выражения (28.42) для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (напомним, что это выражение пригодно для металлов и плазмы). Имеем:

$$\omega^2 \varepsilon = \omega^2 - \omega_p^2; \quad \omega^2 n^2 = c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2; \quad 2c^2 k dk = 2\omega d\omega.$$

Таким образом, имеем в данном случае:

$$\frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega}; \quad uv = c^2. \quad (28.44)$$

Фазовая скорость

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}.$$

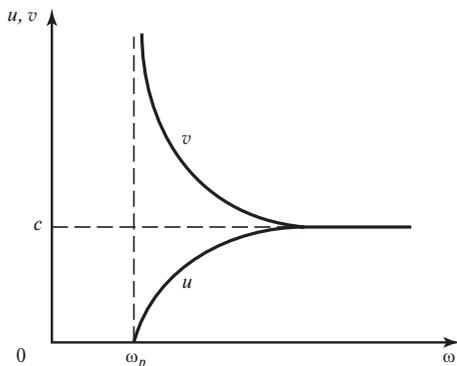


Рис. 28. 23

Групповая скорость с учетом (28.44)

$$u = \frac{c^2}{v} = c \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2} .$$

Интересно, что когда фазовая скорость v (при $\omega = \omega_p$) обращается в бесконечность, групповая скорость u стремится к нулю. Графики $v(\omega)$ и $u(\omega)$ приведены на рис. 28.23.

28.8. Рассеяние света

Дифракцию света на мелких (невидимых глазу) хаотически расположенных неоднородностях среды обычно называют рассеянием. Рассеяние проявляет себя как свечение среды при прохождении через нее света от внешнего источника. Свечение связано с вторичными волнами, излучаемыми атомами среды за счет энергии первичного луча. В силу некогерентности вторичных волн наблюдению доступны лишь средние по времени значения интенсивности рассеянного света в различных направлениях. Иными словами, интенсивность рассеянного излучения в любой точке равна сумме интенсивностей излучений, пришедших от каждой неоднородности. Для теоретического описания явления используется математический аппарат теории вероятностей.

В зависимости от природы неоднородностей рассеяние можно разделить на два основных типа.

1. *Рассеяние в чистых средах (молекулярное рассеяние)*. Если свет распространяется в среде, не содержащей микроскопических включений другого вещества, то единственным видом неоднородности выступают термодинамические флуктуации плотности. Молекулярное рассеяние объясняет, например, голубой цвет неба.

2. *Рассеяние в мутных средах (диффузное рассеяние, явление Тиндалля)*. В этом случае неоднородностями являются микроскопические частицы инородного вещества (пыль, капельки жидкости в газе — облака, туман; твердые частички в жидкости, называемые взвесями и суспензиями; эмульсии — капельки одной жидкости в другой жидкости; инородные микроскопические включения в прозрачных твердых телах — перламутры, молочные стекла и т.п.). Как мы увидим, характер рассеяния в мутных средах существенно зависит от соотношения характерного размера l неоднородностей и длины волны света λ . При $l \ll \lambda$ рассеивается преимущественно коротковолновая компонента падающего излучения; в обратном пределе интенсивность рассеяния примерно одинакова для всех длин волн.

Начнем с рассеяния в чистых средах. Простейшей для рассмотрения чистой средой является разреженный газ. В этом случае так же,

как это делалось в элементарной теории дисперсии (см. § 28.3), в качестве модели молекулы можно взять пружинный маятник (см. рис. 28.13). Падающая волна раскачивает заряд q , который излучает вторичные волны, амплитуда E_0 которых пропорциональна «запаздывающему» ускорению, т.е. квадрату частоты. Действительно, если смещение x заряда q при вынужденных колебаниях изменяется по гармоническому закону

$$x = x_0 \cos \omega t,$$

то электрическое поле излученной волны

$$E \sim -a^* = -\ddot{x}^* = \omega^2 x_0 \cos \omega t^* = \omega^2 x^*.$$

(Звездочка означает, что соответствующие величины следует брать с задержкой на время распространения сигнала в точку наблюдения). Интенсивность света, излученного молекулой, в свою очередь, пропорциональна квадрату амплитуды волны, откуда получаем закон Рэлея:

$$I \sim \omega^4.$$

В видимом диапазоне частоты красного и синего (фиолетового) излучений различаются почти в 2 раза, откуда можно сделать вывод, что интенсивность синей компоненты в излучении одной молекулы примерно в 16 раз превышает интенсивность красной компоненты.

Излучение, рассеянное средой, представляет собой результат интерференции волн, излученных всеми молекулами вещества. Если на масштабах малых по сравнению с длиной волны света можно говорить об однородном распределении молекул, то такая интерференция, как известно, может привести лишь к изменению фазовой скорости волны, но не к изменению ее направления распространения («боковые» лучи, интерферируя, погасят один другой); рассеяния наблюдаться не будет. В реальности же, согласно термодинамике, число молекул в указанных объемах не постоянно (испытывает флуктуации), поэтому газовая среда является оптически неоднородной. В 1908 г. М. Смолуховский теоретически обосновал, что рассеяние в газовой среде вызвано именно термодинамическими флуктуациями плотности газа.

При нахождении вещества в критическом состоянии даже тонкий его слой рассеивает все падающее на него излучение. Дело в том, что критическое состояние соответствует максимально возможным флуктуациям плотности. Рассеяние света в этом случае называют *критической опалесценцией*.

Теорию Солуховского называют также «теорией голубого цвета неба». Дневное небо испускает свет приблизительно равномерно во все стороны (светится) благодаря флуктуациям плотности воздуха,

а голубой цвет в рассеянном излучении преобладает вследствие закона Релея ω^4 .

Горные пейзажи отличаются яркостью красок. Из-за уменьшения плотности воздуха с высотой, его рассеивающая способность падает. Отметим, что яркость и контрастность горных видов порой вызывает иллюзию близости наблюдаемых объектов: люди ошибочно приписывают четкость наблюдаемой картины малому расстоянию до объекта наблюдения. Если мы смотрим с вершины высокой горы в долину, то последняя кажется нам покрытой голубоватой вуалью. Еще более заметно это явление при наблюдении земли из окна самолета в безоблачную погоду.

На заре (или на закате) небо краснеет тоже по причине молекулярного рассеяния. Лучи утреннего (или вечернего) Солнца проходят в атмосфере значительно больший путь, чем днем, теряя по пути преимущественно свою синюю компоненту. Красная — меньше рассеивается и поэтому распространяется дальше. Кроме того, так как синие лучи лежат ближе к линиям поглощения молекул газов, составляющих воздух, они и поглощаются в атмосфере сильнее.

Теперь перейдем к рассеянию в *мутных средах*. Рассмотрим сгусток (обычно говорят «кластер») из N молекул или, например, микроскопическую капельку воды. До тех пор пока размер кластера много меньше длины волны света, все молекулы кластера излучают в одной и той же фазе, следовательно, общее излучение усиливается. Из-за пропорциональности интенсивности квадрату амплитуды, излучение кластера из N молекул интенсивнее излучения одной молекулы в N^2 раз. Распределение рассеянного излучения по частотам определяется законом Рэлея.

С приближением размера кластера к длине волны света разница фаз волн, излученных молекулами из удаленных одна от другой частей кластера, будет становиться все заметнее: излученные волны станут гасить одна другую. Так как указанное явление «раньше» наступает для коротковолновой («синей») части излучения, то доля синих лучей снижается, и спектр становится более равномерным по частотам (более «белым») по сравнению с предсказаниями закона Рэлея. Это объясняет белый (серый) цвет облаков и тумана — капельки воды, из которых состоят облака или туман, имеют размеры порядка длины волны света.

Раковины или жемчуг кажутся переливчато-белыми из-за неоднородностей с размерами порядка длины волны света, хаотически распределенных в прозрачной среде вещества. Данное явление называют опалесценцией.

Когда узкий пучок естественного света проходит через рассеивающую среду (не важно — чистую или мутную), рассеянный свет

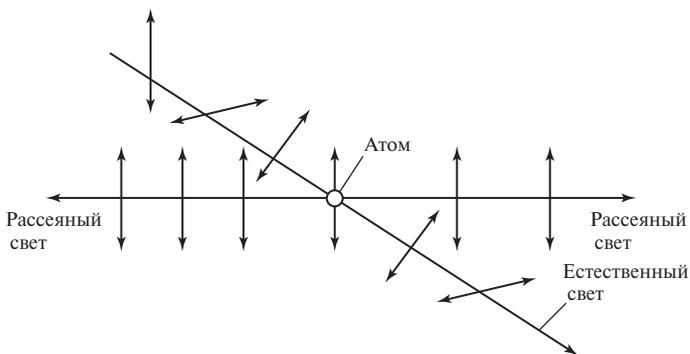


Рис. 28.24

всегда линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной направлению распространения пучка (рис. 28.24). Явление легко понять, если вспомнить диаграмму направленности излучения диполя: излученная волна поляризована параллельно ускорению, которое, в свою очередь, лежит в плоскости, перпендикулярной направлению падающей волны.

Глава 29

КВАНТОВАЯ ОПТИКА

29.1. Тепловое излучение

Если поместить достаточно большое количество молекул газа в непроницаемую теплоизолированную полость, то согласно второму закону термодинамики система, состоящая из газа и стенок полости, придет в термодинамическое равновесие: температура выровняется, скорости молекул будут удовлетворять распределению Максвелла («достаточно большое» количество молекул нужно, чтобы имело смысл понятие температуры, а флуктуации не играли существенной роли). Заметим, что хаотическое ускоренное тепловое движение зарядов в молекулах газа и стенок (электронов и ионов) в соответствии с законами классической электродинамики должно сопровождаться излучением света, так называемым *тепловым излучением*. В том, что это действительно так, легко убедиться, заглянув через маленькое отверстие внутрь разогретой печи — мы увидим красное свечение: пространство внутри печи заполнено не только горячим воздухом и продуктами сгорания, но и светом. Заметим, что даже если из непрозрачной полости откачать весь газ, то свечение останется — ведь разогретые стенки будут продолжать излучать. В силу общности второго закона термодинамики, поле излучения должно, так же как и газ, прийти в термодинамическое равновесие со стенками, если, конечно, последние не прозрачны и энергия не уходит в окружающее пространство. Иными словами, понятие «температура» должно быть применимо и к самому излучению тоже. Но что такое «температура света», «температура электромагнитного поля»? Какое распределение света по частотам (аналог распределения молекул по скоростям) соответствует равновесию? Исчерпывающие ответы на эти сложные вопросы были получены лишь в середине XX в., когда была создана последовательная теория фотонного газа («газа квантов»). Но точный ответ на вопрос о распределении равновесного излучения по частотам был найден гораздо раньше — еще в 1900 г., задолго до создания последовательной квантовой теории.

В 1859 г. Густав Роберт Кирхгоф установил чрезвычайно общее соотношение между способностью тел излучать и поглощать свет. Ход его рассуждений заключался примерно в следующем. Рассмотрим замкнутую теплоизолированную непрозрачную полость, находящуюся в термодинамическом равновесии с излучением внутри нее.

Сразу ясно, что равновесное излучение (энтропия максимальна!) должно быть одинаковым во всех точках и по всем направлениям, не иметь никакой преимущественной поляризации. Далее, часть излучения, падающего из полости на стенку, должна отражаться (без диссипации энергии), часть — поглощаться. Теперь заметим, что если бы стенки поглощали больше световой энергии, чем излучали (или наоборот), то это нарушило бы термодинамическое равновесие: стенки бы нагревались (охлаждались), а излучение бы остывало (нагревалось). Возникающую разницу температур можно было бы использовать для создания вечного двигателя второго рода, что запрещено вторым законом термодинамики. Значит, единственная возможность — это предположить, что стенки поглощают («забирают у излучения») ровно ту же мощность, что и излучают («возвращают излучению»). Более того, данная закономерность должна выполняться в любом, сколь угодно узком интервале частот. Действительно, если бы стенки поглощали энергию преимущественно в одном частотном диапазоне, а излучали бы — в другом, то это бы нарушило равновесное распределение энергии излучения по частотам. В сказанном и состоит суть закона Кирхгофа. Прейдем к его математической формулировке.

Равновесный поток энергии излучения, падающий на стенку со стороны полости, будем характеризовать величиной $d\Phi_\omega$ — мощностью излучения, падающей на единицу площади поверхности тела под всеми углами в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$. Мощность $d\Phi_\omega$ как характеристика излучения должна определяться только температурой последнего. (Здесь мы отдаем дань традиции, сложившейся в литературе по тепловому излучению: аргумент функции писать как нижний индекс. Разумеется, более привычная запись вида $d\Phi(\omega)$ не является ошибочной и вполне допустима.)

Равновесный поток энергии, излучаемый стенкой в полость, будем характеризовать *спектральной плотностью энергетической светимости* r_ω , так что $r_\omega d\omega$ — мощность, излучаемая единицей поверхности стенки под всеми углами в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$. Частотная зависимость r_ω определяется температурой T и материалом стенки.

Полная мощность, излучаемая единицей площади поверхности стенки при данной температуре (ее называют *энергетической светимостью* и обозначают R) выражается интегралом от r_ω по всем частотам:

$$R = \int_0^{\infty} r_\omega d\omega. \quad (29.1)$$

Наконец, способность стенки *поглощать* падающее излучение будем описывать **спектральным коэффициентом поглощения** a_ω , так что $a_\omega d\Phi_\omega$ — мощность, поглощенная единицей поверхности стенки в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$.

Условия равновесия, сформулированные выше (равенство излученной и поглощенной мощности в любом интервале частот $d\omega$), дают

$$r_\omega d\omega = a_\omega d\Phi_\omega \quad (29.2)$$

для любого материала стенок, т.е. для любых r_ω и a_ω . В силу того что поток излучения со стороны полости определяется только температурой, *отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральному коэффициенту поглощения при фиксированной температуре не зависит от материала стенки и является универсальной функцией частоты* $d\Phi_\omega/d\omega$ (**закон Кирхгофа**).

Далее, удобно формально ввести поверхность, при любой температуре полностью поглощающую излучение на всех частотах ($a_\omega = 1$). Такую поверхность будем называть **абсолютно черной**, а соответственно, тело с абсолютно черной поверхностью — **абсолютно черным телом**. Как видно из (29.2), спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела (обозначим ее r_ω^*) и есть универсальная функция частоты и температуры, фигурирующая в законе Кирхгофа. Таким образом, можно записать:

$$r_\omega/a_\omega = r_\omega^*. \quad (29.3)$$

Абсолютно черных тел не существует в природе. Например, для достаточно высоких частот все материалы прозрачны. Тем не менее есть немало тел или объектов, обладающих свойствами, близкими к абсолютно черному телу. Классический пример — небольшое отверстие в полости с непрозрачными в широком частотном диапазоне стенками. Луч света, проникший в полость через отверстие, испытывает так много отражений, при каждом из которых ослабляется, что практически не может выйти наружу. Поэтому площадь отверстия можно с достаточной точностью считать участком с абсолютно черной поверхностью, а излучение внутри самой полости считать равновесным.

В той или иной степени все тела являются цветными, т.е. a_ω существенно зависит от частоты. Если функция a_ω близка к константе в широком частотном диапазоне (разумеется, эта константа меньше единицы), то тела называют серыми.

Отметим сразу, что в жизни мы чаще сталкиваемся с неравновесным излучением (например, свет лампочки, костра, Солнца, звезд), чем с равновесным. В этом случае температура окружающей среды

(космический вакуум тоже можно считать средой — ведь он заполнен излучением) ниже температуры светящегося тела. В этом случае закон Кирхгофа тоже можно применять: нагретые тела в неравновесной системе излучают точно так же, как и в равновесии. Приведем несколько простых примеров.

Пример 29.1. Все знают, что свечка светит ярче газовой горелки, хотя горение происходит примерно при одной и той же температуре, а горелка часто мощнее свечки. Дело в том, что газ горелки является слабо поглощающей средой и согласно закону Кирхгофа должен слабо излучать. А вот среди продуктов сгорания свечки много мелких черных частичек углерода (говорят, что «свечка коптит»). Именно этим черным частичкам мы обязаны не только за копоть, но и за яркость.

Пример 29.2. Еще один известный опыт (такой опыт легко проделать каждому) состоит в том, что в пламя костра вносят черепок расписанного фарфора с темным рисунком на белом фоне, а затем раскаленный черепок вынимают обратно. При этом хорошо видно, что темный рисунок светится, а фон, наоборот, выглядит черным (это похоже на негативный снимок). Вытащить черепок из костра необходимо для большей «неравновесности»: в пламени костра (тем более в закрытой печке) малое излучение белого фона будет компенсироваться сильным отражением излучения печки и рисунок станет почти незаметным.

С точки зрения фундаментальной науки наиболее важной задачей является определение функции r_{ω}^* — ведь именно она определяет равновесное распределение излучения как такового по частотам.

Прежде чем рассказать о попытках вычисления r_{ω}^* на основе классической физики, предпринятых рядом ученых в конце XIX в., попробуем «угадать» результат из соображений размерности. Величина $r_{\omega}^* d\omega$ по определению имеет размерность Вт/м², следовательно, сама r_{ω}^* имеет размерность Дж/м² — энергия, отнесенная к площади. Конечная формула не должна содержать никаких постоянных, которые относятся к природе и размерам тел, но при этом должна отражать зависимость r_{ω}^* от температуры. Поэтому в качестве энергии естественно выбрать величину, пропорциональную kT , а в качестве единственного масштаба длины — длину волны света λ . Тогда

$$r_{\omega}^* \sim \frac{kT}{\lambda^2} = \frac{kT}{(2\pi c/\omega)^2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (29.4)$$

Любопытно, что формула (29.4) в точности совпадает с результатом сложных расчетов на основе классической физики (мы еще и немного «сжульничали» для этого совпадения: «честная» замена переменной λ на переменную ω делается немного сложнее — см. вывод формулы (29.16) ниже).

Один из классических расчетов r_{ω}^* был выполнен в 1897 г. немецким ученым Максом Планком. Суть работы Планка состояла в следующем. Так как закон Кирхгофа (29.3) универсален для тел любой природы, то в качестве тела, находящегося в равновесии с излучением, можно взять простейшее для расчетов — одномерный гармонический осциллятор (тот самый «заряд на пружинке», который фигурирует в классической элементарной теории дисперсии). Затем можно рассчитать для него величины r_{ω} и a_{ω} , после чего по формуле (29.3) найти r_{ω}^* . Вопрос о том, «что считать площадью поверхности осциллятора» не является непреодолимым: эта «площадь» (принято говорить «сечение поглощения») получается как частное от деления мощности, поглощаемой осциллятором, на мощность излучения, падающего на единицу площади плоской поверхности. Прodelав прямые, но несколько громоздкие выкладки, которые мы здесь не приводим, Планк пришел к выражению:

$$r_{\omega}^* = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \langle W \rangle, \quad (29.5)$$

где $\langle W \rangle$ — средняя энергия тепловых колебаний одномерного осциллятора. Согласно классической физике $\langle W \rangle = kT$ (в среднем — по $\frac{1}{2} kT$ на кинетическую и потенциальную энергию). Подставляя $\langle W \rangle = kT$ приходим к формуле

$$r_{\omega}^* = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (29.6)$$

которую принято называть **формулой Рэля—Джинса** (Рэлей и Джинс получили эту формулу одновременно с Планком, но другим способом). Формула Рэля—Джинса хорошо согласуется с экспериментом на низких частотах, однако на высоких частотах противоречит эксперименту, да и вообще, очевидно, абсурдна. Функция r_{ω}^* монотонно возрастает с частотой, а значит, площадь под ее графиком бесконечна (интеграл (29.1) расходится), т.е. абсолютно черное тело при любой конечной температуре излучает бесконечную мощность. Пауль Эренфест позднее дал этой расходимости выразительное название «ультрафиолетовая катастрофа», и оно прижилось.

29.2. Формула Планка

Для разрешения проблемы «ультрафиолетовой катастрофы» в 1900 г. Планк выдвинул гипотезу: энергия W осциллятора может принимать не произвольные, как это следует из классической теории колебаний, а лишь дискретные (лат. *discretus* — прерывистый) значения, кратные его собственной частоте ω_0 : $W = 0, \hbar\omega_0, 2\hbar\omega_0, 3\hbar\omega_0, \dots$, где \hbar — некий коэффициент (исторически Планк ввел немного другую константу — $h \equiv 2\pi\hbar$, обозначение с горизонтальной чертой для $h/2\pi$ принадлежит Полю Дираку; сейчас обе постоянные носят имя Планка). Гипотеза Планка оказалась гениальной — она полностью подтвердилась в 20-е годы XX в., когда была создана квантовая механика.

Почему же экспериментаторы раньше никогда не сталкивались с дискретностью значений энергии осциллятора? Ответ прост: постоянная Планка и частоты макроскопических осцилляторов слишком малы ($\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж · с) для того, чтобы самыми точными приборами зафиксировать дискретность уровней энергии.

Чтобы понять теорию Планка, прежде всего вспомним, как вычисляется среднее значение («математическое ожидание») в теории вероятностей. Пусть величина A может принимать значения $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ с вероятностями соответственно $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ (очевидно, что $P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$ — *условие нормировки*). Тогда $\langle A \rangle = A_0 P_0 + A_1 P_1 + A_2 P_2 + \dots + A_n P_n$.

Для расчета средней энергии «дискретного» осциллятора Планк использовал вероятности, даваемые классической статистикой Максвелла—Больцмана: вероятность того, что система в термодинамическом равновесии имеет энергию W , пропорциональна $e^{-W/kT}$, т.е.

$$P_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{W_n}{kT}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{n\hbar\omega_0}{kT}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}, \quad (29.7)$$

где Z — коэффициент, определяемый из условия нормировки:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}. \quad (29.8)$$

(Начиная с последнего равенства (29.7) и далее мы будем опускать индекс «0» у собственной частоты осциллятора, так как осциллятор с произвольной собственной частотой должен находиться в

термодинамическом равновесии с излучением.) Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 \langle W \rangle &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \hbar \omega e^{-\frac{n \hbar \omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n \hbar \omega}{kT}}} = \\
 &= \frac{0 \cdot e^{-\frac{0}{kT}} + \hbar \omega e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} + 2 \hbar \omega e^{-\frac{2 \hbar \omega}{kT}} + 3 \hbar \omega e^{-\frac{3 \hbar \omega}{kT}} + \dots}{e^{-\frac{0}{kT}} + e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} + e^{-\frac{2 \hbar \omega}{kT}} + e^{-\frac{3 \hbar \omega}{kT}} + \dots} = \\
 &= \hbar \omega \frac{e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} + 2e^{-\frac{2 \hbar \omega}{kT}} + 3e^{-\frac{3 \hbar \omega}{kT}} + \dots}{e^{-\frac{0}{kT}} + e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} + e^{-\frac{2 \hbar \omega}{kT}} + e^{-\frac{3 \hbar \omega}{kT}} + \dots} = \\
 &= \hbar \omega \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots},
 \end{aligned}$$

где $x = e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}$.

Существует несколько способов вычисления подобных выражений. Один из простейших состоит в непосредственном делении «столбиком» многочленов из числителя и знаменателя — результат оказывается обычной убывающей ($x < 1$) геометрической прогрессией:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 \underline{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots} \\
 x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \\
 \hline
 \underline{x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \dots} \\
 x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \\
 \hline
 \underline{x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \dots} \\
 x^3 + x^4 + x^5 + \dots \\
 \hline
 \underline{x^4 + 2x^5 + \dots} \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}
 \left| \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}{x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots} \right.
 \end{array}$$

Значит

$$\hbar\omega \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots} = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

(Последнее равенство легко получить, заметив, что если $S = x + x^2 + x^3 + \dots = x + x(x + x^2 + x^3 + \dots) = x + xS$, то $S = x/(1-x)$. Можно, разумеется, и сразу воспользоваться известной формулой суммы прогрессии.) Возвращаясь к старым обозначениям, окончательно получаем:

$$\langle W \rangle = \hbar\omega \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \hbar\omega \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (29.9)$$

Теперь осталось подставить выражение (29.9) для средней энергии одномерного осциллятора в (29.5). Это и есть **формула Планка**:

$$r_{\omega}^* = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (29.10)$$

Графики r_{ω}^* , для двух разных фиксированных температур приведены на рис. 29.1. Формула Планка хорошо согласуется с экспериментальными данными.

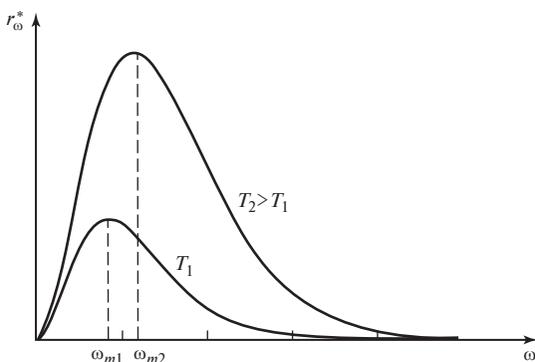


Рис. 29.1

Рассмотрим асимптотики формулы Планка.

1. «Классический предел»: низкие частоты, высокие температуры ($\hbar\omega \ll kT$). Можно приближенно положить $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$.

Тогда вместо (29.10) имеем:

$$r_{\omega}^* \approx \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (29.11)$$

что совпадает с формулой Рэля—Джинса (29.4). Таким образом, пределы применимости классической физики (по крайней мере, для осциллятора) установлены.

2. «Квантовый предел»: высокие частоты, низкие температуры ($\hbar\omega \gg kT$). Единицей по сравнению с экспонентой в знаменателе (29.10) можно пренебречь, и, соответственно, получаем:

$$r_{\omega}^* \approx \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}. \quad (29.12)$$

К выражению вида (29.12) еще в 1896 г. на основе некоторых произвольных допущений пришел Вильгельм Вин, поэтому его называют **формулой Вина**. При $\omega \rightarrow \infty$ убывающая экспонента «забывает» возрастающую степенную функцию ω^3 , что обеспечивает сходимость интеграла по частотам (29.1), и, соответственно, снимается проблема «ультрафиолетовой катастрофы».

Теперь рассмотрим случай промежуточных частот, при которых наблюдается переход от возрастания к убыванию — максимум функции r_{ω}^* . Относительно положения этого максимума можно сделать определенные выводы на основании вида функции (29.10). Перепишем (29.10) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} r_{\omega}^* &= \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{(kT)^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3 \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \\ &= \frac{(kT)^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \frac{y^3}{e^y - 1}, \end{aligned} \quad (29.13)$$

где $y = \hbar\omega/kT$.

При фиксированной температуре форма кривой определяется только вторым сомножителем в (29.13): $f(y) = y^3/(e^y - 1)$. Функция $f(y)$ одинакова для всех температур. Обозначим значение y , при котором

$f(y)$ имеет максимум, как y_m . Но тогда, возвращаясь к старым обозначениям, $y_m = \hbar\omega_m/kT$, или:

$$\omega_m/T = ky_m/\hbar = \text{const} = b', \quad (29.14)$$

где ω_m — частота, при которой r_ω^* имеет максимум.

Выражение (29.14) называется **законом смещения Вина**, а постоянная b' — **постоянной Вина**. Из (29.14) непосредственно следует: *чем выше температура, тем на более высоких частотах наблюдается максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела* (см. рис. 29.1). Значение константы в (29.14) можно получить стандартным способом отыскания экстремума (приравниванием нулю производной $f(y)$ по y). Прямые вычисления дают $b' = 3,694 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Найдем энергетическую светимость абсолютно черного тела R^* в соответствии с ее определением (29.1):

$$\begin{aligned} R^* &= \int_0^\infty r_\omega^* d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega = \\ &= \int_0^\infty \frac{(kT)^4}{4\pi^2c^2\hbar^3} \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) = \frac{(kT)^4}{4\pi^2c^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy. \end{aligned}$$

Интеграл в последнем равенстве, в соответствии с таблицей определенных интегралов, равен $\pi^4/15$. Таким образом, окончательно получаем:

$$R^* = \frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3} T^4 = \sigma T^4. \quad (29.15)$$

Выражение (29.15) называют **законом Стефана—Больцмана**. В 1879 г. Стефан установил его эмпирически, а Больцман пять лет спустя обосновал его теоретически из термодинамических соображений. Постоянная σ равна $5,6696 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K}^4)$ и называется **постоянной Стефана—Больцмана**. Итак: *энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры*.

В экспериментальных работах по оптике вместо частоты ω обычно фигурирует длина волны λ . Сделаем необходимую замену переменной ω на переменную λ во всех важных формулах этой главы.

Прежде всего, введем спектральную плотность энергетической светимости учитывая, что $r_\lambda d\lambda$ — мощность, излучаемая единицей поверхности стенки под всеми углами в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ при температуре T . Учитывая, что $\omega = 2\pi c/\lambda$, имеем $d\omega = (-2\pi c/\lambda^2) d\lambda$ (знак « \rightarrow » означает просто убывание длины волны при росте частоты). Теперь подставим ω и $d\omega$ в $r_\omega^* d\omega$:

$$\begin{aligned} r_\omega^* d\omega &= \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{kT} - 1} d\omega = \frac{\hbar(2\pi c/\lambda)}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} \left(-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) d\lambda = \\ &= -\frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} d\lambda = -r_\lambda^* d\lambda. \end{aligned} \quad (29.16)$$

Итак, другой вид формулы Планка:

$$r_\lambda^* = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1}. \quad (29.17)$$

Кривые зависимости $r_\lambda^*(\lambda)$ для двух различных температур показаны на рис. 29.2.

Закон смещения Вина для длин волн установим тем же способом, что и для частот [см. (29.13), (29.14)]:

$$\begin{aligned} r_\lambda^* &= \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} = \frac{(kT)^5}{(2\pi)^3 \hbar^4 c^3} \left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right)^5 \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} = \\ &= \frac{(kT)^5}{(2\pi)^3 \hbar^4 c^3} \frac{y^5}{e^y - 1}; \\ y &= \frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}. \end{aligned}$$

Так же, как и в (29.13), форма кривой определяется вторым сомножителем с y , это опять кривая с максимумом. Пусть максимум соответствует y_m . Но тогда длина волны λ_m , соответствующая максимуму, удовлетворяет соотношению

$$\lambda_m T = \frac{2\pi\hbar c}{ky_m} = \text{const} = b, \quad (29.18)$$

где b — **постоянная Вина** (ее не следует путать с введенной выше постоянной Вина b' для частот). Отыскание экстремума второго сом-

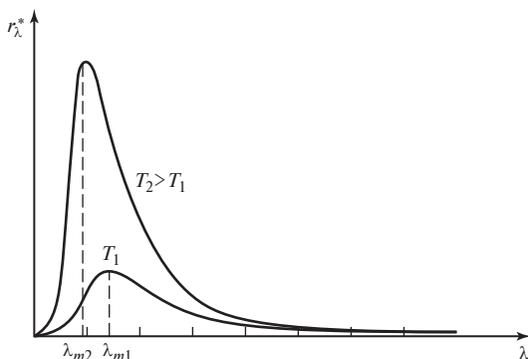


Рис. 29. 2

ножителя стандартным методом дает $y_m = 4,965$, и последующая подстановка y_m в (29.17) дает $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Закон Стефана—Больцмана, разумеется, имеет один и тот же вид вне зависимости от того, по какой переменной (ω или λ) производится интегрирование r^* . Действительно, согласно (29.16) имеем:

$$\int_0^{\infty} r_{\omega}^* d\omega = - \int_{\infty}^0 r_{\lambda}^* d\lambda = \int_0^{\infty} r_{\lambda}^* d\lambda = \sigma T^4. \quad (29.19)$$

Пример 29.3. Оценка температуры поверхности Солнца. Вид спектра излучения Солнца, измеренный на поверхности Земли, близок к кривой Планка (если пренебречь «фраунгоферовыми линиями»), поэтому Солнце можно приближенно считать абсолютно черным телом или, по крайней мере, серым. Максимум спектральной плотности излучения приходится на $\lambda_m \approx 550 \text{ нм}$ (этой же длине волны соответствует максимум чувствительности человеческого глаза). Подстановка в закон смещения Вина (29.18) дает $T \approx 5300 \text{ К}$. Учет поправки на искажение спектра из-за прохождения света через земную атмосферу дает значение $T \approx 6000 \text{ К}$. Разумеется, в недрах Солнца температура намного выше, но ее можно лишь рассчитать, исходя из конкретной модели процессов внутри Солнца. Согласно этим расчетам температура в центре Солнца достигает 15 млн градусов.

Пример 29.4. Пирометры — это приборы для определения температуры нагретых тел на основании их теплового излучения. Один из самых распространенных пирометров — «пирометр с исчезающей нитью». Прибор устроен так, что на изображение в зрительной трубе

исследуемого тела накладывается нить специальной лампы накаливания (нить помещают в фокальной плоскости объектива). В цепь лампы включают реостат, позволяющий регулировать накал нити таким образом, чтобы она исчезала на фоне тела, температура которого измеряется. По силе тока в цепи лампы определяется температура нити, а следовательно, и температура (принято говорить *яркостная температура*) тела. Основная трудность для точного определения температуры связана с правильным учетом поправок на «нечерноту» исследуемого тела.

Пример 29.5. Реликтовое излучение. Согласно современным представлениям наша Вселенная образовалась примерно 14 (по последним данным — 13,73) млрд лет назад в результате Большого взрыва. Одним из аргументов в пользу этих представлений является открытие так называемого реликтового (от лат. *relictus* — оставленный), или фонового излучения. В 1964 г. двое американских ученых Арно Пензиас и Роберт Уилсон изучали какие-то досаждавшие им источники радиоволн, создававшие помехи для связи. В своей работе они применили чувствительную антенну и с ее помощью обнаружили, что радиoshум совершенно не зависит от времени суток или направления в небе. Последовавшее затем изучение спектра «помех» показало соответствие формы кривой расчетам спектра по формуле Планка для сверхнизких температур. Недавно (Нобелевская премия по физике за 2006 г.) с помощью прецизионного спутникового оборудования температура реликтового излучения была найдена с фантастической точностью: она оказалась равной 2,725 К. Итак, излучение от Большого взрыва, претерпев сильное адиабатическое охлаждение по мере расширения Вселенной, все еще присутствует в нашем мире.

В заключение подведем итог тому, что мы узнали о равновесном тепловом излучении как таковом. Равновесное тепловое излучение одинаково во всех точках и по всем направлениям (говорят: однородно и изотропно), не поляризовано и имеет непрерывный спектр, определяемый формулой Планка (29.10) (или эквивалентной ей формулой (29.17)).

Далее, можно показать (доказательство мы опускаем), что формуле Планка соответствует объемная плотность энергии w_ω излучения, приходящегося на частотный интервал от ω до $\omega + d\omega$, определяемая соотношением $w_\omega = 4r_\omega^*/c$, откуда

$$w_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (29.20)$$

Формула (29.20) показывает, как энергия равновесного излучения распределена по частотам.

Дальнейшее углубление понимания природы теплового излучения привело к представлениям об излучении как о газе особых частиц — *фотонов (квантов)* с энергией $\hbar\omega$. Выяснение свойств *фотонного газа* — один из важных предметов *квантовой физики*.

29.3. Релятивистское соотношение между импульсом и энергией

Специальная теория относительности (СТО) дает следующее соотношение между импульсом p и энергией W частицы:

$$W^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2. \quad (29.21)$$

Выражение в правой части, содержащее массу частицы m и скорость света в вакууме c , одинаково в *любой* инерциальной системе отсчета, т.е. является инвариантом.

Связь (29.21) между энергией и импульсом, даваемая СТО, отличается от классического выражения, Это сразу видно, например, для *свободной* частицы, энергия W которой равна $p^2/2m$. Чтобы установить связь между СТО и классической механикой рассмотрим выражение (29.21) при скоростях, малых по сравнению со скоростью c ($v/c = mv/(mc) \approx p/(mc) \ll 1$; знак « \approx » связан с использованием для малых скоростей нерелятивистского соотношения $p = mv$):

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} = mc^2 \sqrt{1 + [p/(mc)]^2} \approx \\ &\approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \right] = mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \end{aligned} \quad (29.22)$$

Как видно из (29.22) к «старой» кинетической энергии (второму слагаемому) в СТО добавляют постоянную величину mc^2 , называемую *энергией покоя*.

При произвольных скоростях кинетическая энергия свободной частицы также равна разности полной энергии W и энергии покоя mc^2 .

Легко видеть, что в отличие от классической механики СТО допускает существование «частиц без массы», обладающих энергией и импульсом. Действительно, подстановка в (29.21) $m = 0$ дает:

$$W = pc. \quad (29.23)$$

«Безмассовые» частицы действительно существуют в природе. Примером таких объектов являются частицы света фотоны (от лат. photos – свет).

Как оказалось, энергия и импульс фотонов выражаются через обычные характеристики волны — частоту и волновой вектор:

$$\left. \begin{aligned} W &= \hbar\omega; \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k}. \end{aligned} \right\} \quad (29.24)$$

Соотношения (29.24), называемые *соотношениями де Бройля*, связывают представления о свете как об электромагнитной волне с квантовыми (на что указывает постоянная Планка) представлениями о свете как о потоке частиц.

Пример 29.6. Давление света, нормально падающего на поглощающую площадку, равно интенсивности, деленной на скорость света. Классическое рассмотрение вопроса о световом давлении довольно громоздко. Если же использовать идею фотонов и соотношение (29.23), то результат тривиален. Интенсивность — это энергия фотонов, падающих в единицу времени на единичную площадку, а давление, соответственно, — импульс, передаваемый этой площадке фотонами в единицу времени. Импульс равен энергии, деленной на скорость c .

Следует сказать, что все оптические явления могут быть поняты с точки зрения квантовых («корпускулярных») представлений (в том числе задачи геометрической и волновой оптики). При этом существует ряд наблюдаемых эффектов, объяснение которых возможно *только* с использованием представления о фотонах.

29.4. Эффект Комптона

При упругом столкновении фотона с электроном (вместо слова «столкновение» используют термин «рассеяние») фотон передает часть своей энергии электрону и, в соответствии с (29.24), меняет частоту. Эффект уменьшения частоты света при рассеянии на электронах называется *эффектом Комптона*.

Для количественных вычислений воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. Пусть фотон с энергией W_ϕ и импульсом \vec{p}_ϕ рассеивается на угол θ (рис. 29.3) на неподвижном электроне массой m . В результате фотон и электрон получают новые энергии и импульсы, которые отметим штрихами. Законы сохранения энергии и импульса дают:

$$\left. \begin{aligned} W_{\phi} + mc^2 &= W'_{\phi} + W'_{\text{э}}; \\ \vec{p}_{\phi} &= \vec{p}'_{\phi} + \vec{p}'_{\text{э}}. \end{aligned} \right\} \quad (29.25)$$

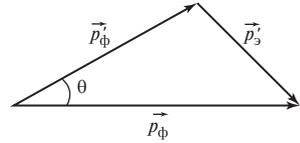


Рис. 29.3

Перегруппируем слагаемые, умножим второе уравнение на c и возведем оба уравнения в квадрат:

$$\left. \begin{aligned} (W_{\phi} - W'_{\phi} + mc^2)^2 &= W'^2_{\text{э}}; \\ (\vec{p}_{\phi} - \vec{p}'_{\phi})^2 c^2 &= (\vec{p}'_{\text{э}})^2 c^2. \end{aligned} \right\}$$

После преобразования получаем:

$$\begin{aligned} W_{\phi}^2 + W_{\phi}'^2 + (mc^2)^2 - 2W_{\phi}W_{\phi}' + 2W_{\phi}mc^2 - 2W_{\phi}'mc^2 &= W'^2_{\text{э}}; \\ (p_{\phi}c)^2 + (p'_{\phi}c)^2 - 2p_{\phi}p'_{\phi}c^2 \cos \theta &= (p'_{\text{э}}c)^2. \end{aligned}$$

Вычитая из верхнего уравнения нижнее, с учетом (29.21), получаем:

$$(mc^2)^2 - 2W_{\phi}W_{\phi}' + 2W_{\phi}mc^2 - 2W_{\phi}'mc^2 + 2p_{\phi}p'_{\phi}c^2 \cos \theta = (mc^2)^2.$$

Производя сокращения и учитывая (29.23), для фотона имеем:

$$-p_{\phi}p'_{\phi}c^2 + (p_{\phi}c)mc^2 - (p'_{\phi}c)mc^2 + p_{\phi}p'_{\phi}c^2 \cos \theta = 0,$$

или

$$(p_{\phi} - p'_{\phi})mc = p_{\phi}p'_{\phi}(1 - \cos \theta);$$

$$\frac{1}{p'_{\phi}} - \frac{1}{p_{\phi}} = \frac{1}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Так как, согласно (29.24), $p = \hbar k = 2\pi\hbar/\lambda \equiv h/\lambda$, то окончательно получаем:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) = \lambda_K (1 - \cos \theta) = 2\lambda_K \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (29.26)$$

где $\lambda_K \equiv h/mc \approx 2,426 \cdot 10^{-12}$ м — **комптоновская длина волны** электрона.

Отметим, что в качестве единицы длины в микромире часто пользуются значением размера атома — **ангстремом** ($1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ м).

Таким образом $\lambda_K \approx 0,024 \text{ \AA}$.

Из выражения (29.26) следует, что длина волны λ' излучения, рассеянного на угол θ , больше длины волны падающего излучения λ на значение $\Delta\lambda$, зависящее только от угла θ .

Эксперимент по проверке формулы (29.26) был проведен в 1922 г. Артуром Комптоном. Источником фотонов ($\lambda = 0,71 \cdot 10^{-10}$ м = $= 0,71 \text{ \AA}$) служила рентгеновская трубка, а мишенью — графит. В качестве прецизионного спектрального прибора Комптону послужила «естественная дифракционная решетка» — монокристалл. Рентгеновские фотоны высоких энергий были необходимы Комптону по следующим причинам. Во-первых, в этом случае было оправдано пренебрежение неизвестными в то время точно кинетической энергией и энергией связи с кристаллической решеткой электронов графита в (29.25), а во-вторых, из-за крайней малости λ_K уменьшение частоты (увеличение $\Delta\lambda$) для коротковолнового излучения было легче зарегистрировать.

Кроме фотонов, увеличивших длину волны, в экспериментах Комптона также наблюдались фотоны, рассеянные на угол $\theta \neq 0$, но не изменившие частоты. Оказалось, что это фотоны, рассеянные на ядрах углерода. Так как ядра во много тысяч раз тяжелее электронов, то комптоновский сдвиг от рассеяния на ядрах на 3—4 порядка меньше (масса частицы-мишени в выражении для λ_K стоит в знаменателе).

Эксперименты Комптона показали, что *рассеяние фотонов происходит аналогично рассеянию любых других частиц*. В рамках волновой оптики объяснить эффект изменения частоты света в данном эксперименте не удается.

29.5. Фотоэффект

Фотоэффектом называют испускание веществом электронов под действием света. Эффект был открыт в 1887 г. Генрихом Герцем, а всесторонне исследован в 1888 г. русским ученым А.Г. Столетовым. Последний экспериментально обнаружил и сформулировал важные закономерности явления: наиболее эффективно действуют ультрафиолетовые лучи (существует «*красная граница*» — максимальная длина волны, при которой эффект имеет место); количество испускаемых заряженных частиц пропорционально интенсивности падающего излучения; под действием света испускаются только отрицательные заряды (в 1889 г. Ленард и Томсон доказали, что это электроны).

Все попытки объяснить фотоэффект с помощью классических представлений о свете как электромагнитной волне сталкивались с непреодолимой трудностью. Было непонятно, почему вне зависимости от интенсивности только свет с малой длиной волны вызывает испускание электронов. Иными словами, с чем связан феномен «красной границы»?

Ответ был получен в 1905 г. Эйнштейном, развившем идеи Планка о «прерывистом» испускании света — «порциями» с энергией $\hbar\omega$. Как мы уже знаем, эти порции получили название квантов, или фотонов.

Эйнштейн записал уравнение, используя следующую модель. Фотон, поглощаясь в веществе, передает свою энергию электрону, и если этой энергии достаточно для преодоления притяжения электрона к ионам кристаллической решетки (совершения работы выхода A), то электрон может покинуть вещество, что и составляет суть фотоэффекта. Тогда можно записать ограничения, накладываемые законом сохранения энергии на данный процесс, в виде

$$\hbar\omega = A + mv^2/2, \quad (29.27)$$

где $mv^2/2$ — максимальная кинетическая энергия электрона, вылетевшего из образца. Уравнение (29.27) называют *уравнением Эйнштейна для фотоэффекта*. Очевидно, что при $\hbar\omega < A$ фотоэффект невозможен, что и объясняет «красную границу»: $\omega_{\text{кр}} = A/\hbar$, или $\lambda_{\text{кр}} = 2\pi\hbar/A \equiv h/A$.

Соответствие эксперименту уравнения (29.27) доказывает, что свет состоит из неделимых частиц, энергия которых может поглощаться лишь целиком. Действительно, из открытого Планком факта, что свет излучается порциями, еще не вытекает «прерывистая» структура самого света. Как образно заметил Эйнштейн, «если пиво всегда продается в бутылках, содержащих пинту, отсюда не следует, что пиво состоит из неделимых частей, равных пинте».

Отметим, что приведенная метафора Эйнштейна на первый взгляд опровергается открытым позже эффектом Комптона, в котором вроде бы «поглощается» как раз «часть» фотона. В связи с этим следует сказать, что по представлениям современной физики эффект Комптона выглядит так: падающий на электрон фотон исчезает и рождается новый — «рассеянный».

Распространенным устройством, использующим фотоэффект, является *фотоэлемент* (рис. 29.4). В стеклянной вакуумной колбе находятся два металлических электрода: анод 1 и катод 2. На анод подается плюс источника питания, на катод — минус (разность потенциалов между анодом и катодом называется *анодным напряжением* U). При освещении катода светом возникает фототок.

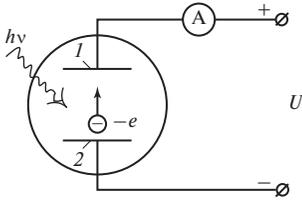


Рис. 29.4

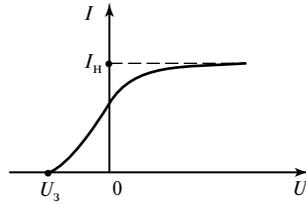


Рис. 29.5

Типичная зависимость фототока от анодного напряжения (*вольт-амперная характеристика* фотоэлемента, сокращенно — ВАХ) показана на рис. 29.5. Нелинейная ВАХ в области малых U связана с тем, что не все выбитые светом электроны достигают анода. При достаточно больших U наступает насыщение: анода достигают все испущенные катодом электроны. В области $U < 0$ электронам, чтобы попасть на анод, необходимо преодолеть дополнительный потенциальный барьер eU . При $mv^2/2 = eU_3$ фототок обращается в нуль, поэтому U_3 называют *задерживающим напряжением*. На основании (29.27) можно записать $\hbar\omega = A + eU_3$, или:

$$U_3 = \frac{\hbar}{e} \omega - \frac{A}{e}. \quad (29.28)$$

Соответствующий график приведен на рис. 29.6. Наклон прямой $U_3(\omega)$ определяется отношением фундаментальных констант \hbar/e , экстраполяция графика отсекает на оси ординат величину A/e , а точка пересечения графика с осью абсцисс соответствует $\omega_{кр}$.

В связи с уравнением Эйнштейна (29.27) интересно отметить, что простая передача всей энергии фотона свободному электрону запре-

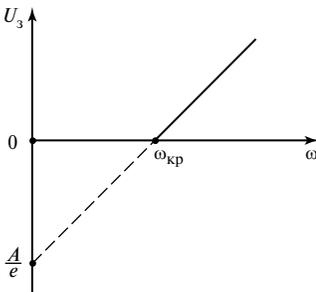


Рис. 29.6

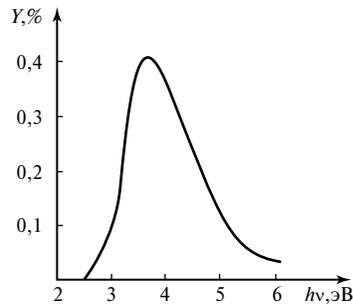


Рис. 29.7

цена законами сохранения энергии и импульса. Действительно, в этом случае уравнения (29.25) свелись бы к уравнениям

$$\begin{cases} W_{\phi} + mc^2 = W'_{\text{э}}; \\ \vec{p}_{\phi} = \vec{p}'_{\text{э}}. \end{cases}$$

и далее:

$$\begin{cases} (W_{\phi} + mc^2)^2 = W'^2_{\text{э}}; \\ (\vec{p}_{\phi})^2 c^2 = (\vec{p}'_{\text{э}})^2 c^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{\phi}^2 + (mc^2)^2 + 2W_{\phi}mc^2 = W'^2_{\text{э}}; \\ (p_{\phi}c)^2 = (p'_{\text{э}}c)^2; \end{cases}$$

$$(mc^2)^2 + 2W_{\phi}mc^2 = (mc^2)^2;$$

$$W_{\phi}mc^2 = 0,$$

что абсурдно. На самом деле в процессе поглощения фотона участвует близлежащее ядро атома, которое принимает на себя импульс отдачи. Однако из-за колоссальной разницы в массах электрона и ядра передача импульса отдачи происходит практически без передачи энергии, что и обеспечивает справедливость уравнения (29.27).

Зависимость фототока насыщения от частоты света определяется вероятностью (или, как говорят, сечением) процесса. Вычисление сечения фотоэффекта представляет собой сложную задачу квантовой физики, которой мы здесь не касаемся. Представление о том, с какой вероятностью падающий фотон выбивает из образца электрон, можно получить из экспериментального графика (доля Y участвующих во внешнем фотоэффекте фотонов от общего числа падающих на образец из натрия фотонов как функция энергии фотона), приведенного на рис. 29.7.

При очень мощных световых пучках, которые стали доступны экспериментаторам после создания лазеров, возможно наблюдение также и многофотонных процессов, когда электрон получает энергию от нескольких (числом $N > 1$) фотонов одновременно (в этом случае в левой части уравнения (29.27) следует писать $N\hbar\omega$). Для света небольшой интенсивности вероятность многофотонных процессов пренебрежимо мала.

В заключение отметим, что тот же самый механизм поглощения фотонов может приводить просто к переходам электронов вещества в возбужденные состояния (состояния с большей энергией), при этом электроны остаются в образце. Это явление называют *внутренним фотоэффектом*. В противовес внутреннему фотоэффекту, описанный выше процесс испускания электронов из образца называют *внешним фотоэффектом*.

29.6. Тормозное рентгеновское излучение

Остановимся теперь на явлении, противоположном рассмотренному в предыдущем параграфе, — на испускании веществом фотонов при облучении его электронами (своего рода «обратный фотоэффект»). Электроны, разогнанные разностью потенциалов U и, соответственно, обладающие кинетической энергией eU , падают на поверхность металлической мишени, называемой *антикатодом*. При этом наблюдается излучение света в широком диапазоне частот.

Само по себе излучение света в таком процессе не противоречит классической электродинамике: из-за силы торможения в веществе электроны испытывают ускорение и поэтому должны излучать. Тем не менее классическая электродинамика не в состоянии объяснить существование максимальной частоты ω_{\max} испускаемого света, открытое экспериментально. Классическая физика не накладывает частотного ограничения на испускаемый при торможении заряда свет.

С квантовой точки зрения максимальная частота излучения не составляет загадки: ведь электрон не может «произвести» фотон с энергией, большей его собственной кинетической энергии. Откуда и следует искомое ограничение:

$$eU = \hbar \omega_{\max}. \quad (29.29)$$

Следует сказать, что для описания процессов, подобных выше-рассмотренным, энергию eU обычно выражают не в джоулях, а в электрон-вольтах ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$). Длина волны фотона, удовлетворяющего условию (29.29), выраженная в ангстремах, находится из формулы $\lambda = 2\pi\hbar c / (eU) = 12390 / U$, где U принимается в вольтах. Легче для запоминания, хоть и несколько неточна, другая формула («правило раз-два-три-четыре-пять»): $\lambda = 12345 / U$. Например, минимальная длина волны фотона, который может излучиться при торможении электрона с кинетической энергией около 12 кэВ, составляет примерно 1 \AA , что соответствует рентгеновскому диапазону.

Глава 30

ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

30.1. Корпускулярно-волновой дуализм

Что же такое свет? Казалось бы, на этот вопрос ответить очень просто. Свет представляет собой электромагнитные волны. В подтверждение наших слов мы можем привести в пример опыты по дифракции и интерференции света. Именно так ученые думали в конце XIX века. Считалось, что все оптические явления можно описать с помощью представления о свете как о волнах. Тогда считалось, что в физике не осталось фактически ни одной нерешенной задачи; ну разве что оставались проблемы, связанные с описанием теплового излучения — с помощью волновых представлений о свете не удавалось получить согласие с опытом.

Эту проблему решил Макс Планк в 1900 г. Ему удалось получить эмпирическую формулу для объемной спектральной плотности энергии излучения абсолютно черного тела (формула Планка). Эта формула совпала с экспериментом. Однако для теоретического обоснования своей формулы Планку пришлось сделать предположение о том, что энергия излучается не непрерывно, а порциями — квантами. Энергия такого кванта пропорциональна частоте излучения $\varepsilon = h\nu$.

Но, может быть, свет только излучается квантами, а распространяется и поглощается в виде непрерывных волн? Ответ на этот вопрос дал Эйнштейн в 1905 г. Он объяснил еще одно явление, которое не удавалось описать с помощью волновых представлений — фотоэффект. При освещении металлической пластинки светом, она испускает электроны. При уменьшении частоты света фотоэффект прекращается при некоторой частоте — красной границе фотоэффекта. Так вот, объяснить эту красную границу с помощью волновых представлений о свете и не удавалось. В то же время, если считать, что на пластинку падают кванты света, энергия каждого из которых пропорциональна частоте, то возникновение красной границы становится очевидным — электрон, получивший энергию кванта после поглощения, не способен покинуть металл, так как работа выхода электрона из металла оказывается больше энергии электрона.

Итак, в начале XX в. выяснилось, что *свет обладает как волновыми, так и корпускулярными свойствами*. Для описания одних опытов свет можно считать волной (интерференция, дифракция), для объяснения же других экспериментов (фотоэффект, эффект Комп-

тона, тепловое излучение) свет описывается как поток частиц. Таким образом свет является сложным объектом, обладающим как корпускулярными, так и волновыми свойствами, т.е. свету присущ корпускулярно-волновой *дуализм*.

В 1923 г. французскому физику Луи де Бройлю пришла в голову идея. Раз свет имеет дуальную природу, т.е. одновременно проявляет свойства как частиц, так и волн, то почему бы частицам вещества, таким как электроны, не обладать волновыми свойствами? Эта идея легла в основу диссертации де Бройля на соискание ученой степени доктора философии (PhD).

30.2. Гипотеза де Бройля

Итак, по предположению де Бройля, частицы вещества обладают волновыми свойствами. Давайте, вслед за де Бройлем, сопоставим частице длину волны. Делать мы это будем по аналогии со светом. Плоская монохроматическая электромагнитная волна в вакууме описывается вектором напряженности $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi)$. Длина волны может быть найдена с помощью модуля волнового вектора

$$\lambda = 2\pi/k. \quad (30.1)$$

Дисперсионное соотношение $k = \omega/c$, где c — скорость света в вакууме.

Теперь представим свет как совокупность квантов. Энергия одного кванта $\varepsilon = \hbar\omega$, его импульс $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Рассмотрим свободную (т.е. не взаимодействующую) частицу, например электрон. Пусть частица, по аналогии с фотоном, обладает волновым вектором, таким, что импульс равен:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (30.2)$$

Тогда, воспользовавшись формулой (30.1), мы найдем для длины волны, сопоставляемой частице вещества,

$$\lambda_B = 2\pi/k = 2\pi\hbar/p = h/p. \quad (30.3)$$

Итак, *частицы обладают волновыми свойствами*. Это значит, что для них возможна дифракция и интерференция по аналогии со светом. Но мы в повседневной жизни не наблюдаем эти явления для макроскопических объектов. В чем же здесь дело? Может быть, гипотеза де Бройля не верна? Почему же мы не наблюдаем дифракции камня на заборе по аналогии с дифракции света на дифракционной решетке?

Пример 30.1. Для ответа на эти вопросы рассчитаем длину волны макроскопического тела, например пули, вылетающей из автомата. Пусть масса пули $m_{\text{п}} = 9 \text{ г} = 0,009 \text{ кг}$, ее скорость $v_{\text{п}} = 800 \text{ м/с}$. Таким образом, импульс пули равен $p = mv = 7,2 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Найдем длину волны де Бройля с помощью формулы (30.3):

$$\lambda_{\text{Б}} = h/p = 6,6 \cdot 10^{-34} / 7,2 = 0,9 \cdot 10^{-34} \text{ м.}$$

Рассмотрим опыт Юнга для пуль. Пусть пули пролетают через две щели, расстояние между которыми d . Расстояние до экрана — L . Схема опыта приведена на рис. 30.1. Будем ли мы наблюдать интерференцию?

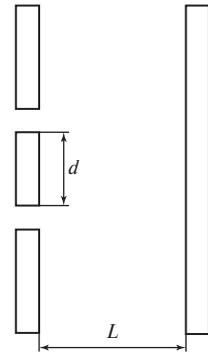


Рис. 30.1

Чтобы ответить на этот вопрос, рассчитаем ширину интерференционной полосы. Из теории интерференции света мы знаем, что ширина интерференционной полосы равна $\Delta x = L\lambda/d$. Пусть $L = 10 \text{ м}$, $d = 10^{-2} \text{ м}$. Тогда $\Delta x = L\lambda/d = 0,9 \cdot 10^{-34} / 10^{-2} \approx 10^{-32} \text{ м!}$

Итак, ширина интерференционной полосы при интерференции макроскопического объекта — пули — оказывается слишком малой, чтобы ее можно было обнаружить экспериментально. Вот поэтому мы и не наблюдаем интерференционных явлений для частиц в повседневной жизни.

Пример 30.2. Рассмотрим микроскопический объект, например электрон, движущийся со скоростью $v = 10^6 \text{ м/с}$. Поскольку масса электрона $m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$, то длина волны де Бройля для такого электрона равна

$$\lambda_{\text{Б}} = h/p = 6,63 \cdot 10^{-34} / (0,91 \cdot 10^{-30} \cdot 10^6) = 7,29 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Такой длиной волны обладает рентгеновское излучение, для которого наблюдаются явления дифракции и интерференции. Таким образом, электроны тоже могут участвовать в дифракции и интерференции.

30.3. Экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля

Интерференция электронов была обнаружена еще до появления гипотезы де Бройля. Но тогда этот эксперимент не был понят.

Девиссон и Кэнсман в 1921—1923 гг. проводили эксперименты по рассеянию электронов тонкими металлическими пленками. Они наблюдали максимумы при рассеянии электронов, зависящие от скорости электронов. В одном из опытов прибор лопнул и никелевая

пленка окислилась. Затем эту пленку прокалили, что привело к перекристаллизации с образованием крупных кристаллов. При этом число максимумов при рассеянии электронов резко возросло, а сами максимумы сделались более отчетливыми. Происхождение максимумов долго не могли объяснить, пока их не истолковали как результат интерференции волн де Бройля.

Пример 30.3. В своем опыте Девиссон и Джермер исследовали рассеяние электронов на монокристалле никеля (рис. 30.2).

В эксперименте менялся угол Θ и ускоряющая разность потенциалов электронов. При угле Θ , соответствующем *зеркальному* отражению электронов от кристалла, наблюдался резко выраженный максимум, изображенный на рис. 30.2 в полярных координатах.

Попробуем объяснить эксперимент Девиссона и Джермера с помощью гипотезы де Бройля. Поставим в соответствие электрону длину волны де Бройля (30.3). Тогда на кристаллической решетке будет происходить дифракция, аналогичная дифракции рентгеновских лучей Вульфа и Брегга. Пусть d — расстояние между кристаллическими плоскостями (изображенными штриховой линией на рис. 30.3).

На рис. 30.3 изображена плоская волна де Бройля, падающая на кристалл никеля. Жирной линией показана разность хода волн Δ , рассеянных на двух атомах. Нетрудно видеть, что $\Delta = 2d \sin \theta$. В то же время из условия интерференционного максимума (на разности хода должно укладываться четное число полуволн) получим $\Delta = m\lambda_B$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Откуда

$$2d \sin \theta = m\lambda_B. \quad (30.4)$$

Формула (30.4) представляет собой *условие Вульфа—Брегга*, описывающее дифракцию рентгеновских лучей на кристаллической решетке.



Рис. 30.2

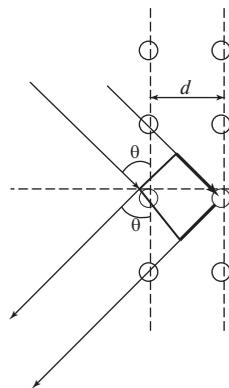


Рис. 30.3

Используя формулы (30.3) и (30.4), определяем угол дифракции, соответствующий первому максимуму. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U , приобретает кинетическую энергию

$$m_e v^2 / 2 = Ue,$$

где m_e и e – масса и модуль заряда электрона. Отсюда импульс электрона, прошедшего разность потенциалов U :

$$p = m_e v = \sqrt{2m_e Ue}.$$

Используя формулу (30.3), находим длину волны де Бройля

$$\lambda_B = h / \sqrt{2m_e Ue}.$$

Из условия (30.4), для максимума первого порядка получаем:

$$\theta = \arcsin \left(\frac{mh}{2d\sqrt{2m_e Ue}} \right).$$

Нужно отметить, что волновые свойства проявляются (и это наблюдается экспериментально) не только у электронов, но и у других элементарных частиц и даже у легких атомов.

Пример 30.4. Рассмотрим *дифракцию нейтронов*. Поскольку нейтрон не имеет заряда, то он взаимодействует только с ядрами посредством так называемого сильного взаимодействия. Рассеянные нейтроны попадают на фотопластинку, покрытую индиевой фольгой. В результате ядерной реакции фотопластинка чернеет в местах попадания нейтронов. На рис. 30.4 приведена нейтронограмма, полученная при дифракции нейтронов на кристалле ниобия.

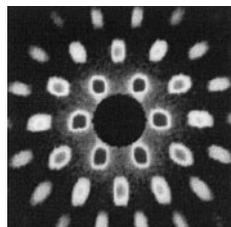


Рис. 30.4

В настоящее время дифракция нейтронов широко используется в кристаллографии для определения структуры кристаллической решетки.

30.4. Принцип неопределенности Гейзенберга

Можно ли *сколь угодно точно* измерить одновременно *координату*, например x , и *проекцию импульса* частицы на ось x ? В классической физике ответ очевиден. Конечно же, мы одновременно можем знать точные значения проекции импульса и координаты.

Однако для микрочастицы ответ неочевиден. Ведь теперь мы имеем дело одновременно и с частицами, и с волнами.

Пример 30.5. Рассмотрим мысленный эксперимент. Пусть частица с импульсом \vec{p} пролетает через щель шириной d . Мы будем фиксировать положение частицы на экране (рис. 30.5). Такой частице мы можем приписать длину волны де Бройля $\lambda_B = h/p$. Следовательно, на щели возникнет дифракция. Воспользуемся формулой определения минимумов m -го порядка при дифракции плоской волны $d \sin \theta_m = m\lambda_B$, где $m = 1, 2, \dots$. Подставим в эту формулу длину волны де Бройля $\sin \theta_m = mh/(pd)$. Для первого минимума мы получим:

$$\sin \theta_1 = h/(pd). \quad (30.5)$$

Предположим, что мы хотим измерить координату x частицы с помощью нашего опыта. Для этого щель нужно сделать узкой. Чем уже щель, тем точнее мы знаем координату частицы. Но вот проблема: как только мы начнем уменьшать ширину щели d , у нас сразу же увеличится угол θ_1 , соответствующий первому минимуму, или, другими словами, увеличится ширина центрального максимума. Это значит, что в результате дифракции наша частица попадет на экран где-то в районе центрального максимума. Где точно — мы не знаем. Если мы проделаем много опытов и будем измерять число электронов, попавших в ту или иную точку экрана, то мы получим дифракционную картину, представленную на рис. 30.5. Однако нужно заметить, что некоторая часть частиц может попасть не в центральный максимум, а в первый, второй и т.д. Но вероятность таких событий мала.

Итак, частица, падавшая перпендикулярно плоскости щели, в результате дифракции движется под углом к этой плоскости. Причем точное значение угла мы не знаем. Мы знаем только то, что с наибольшей вероятностью частица будет двигаться в пределах $-\theta_1 < \theta < \theta_1$, то есть она попадет куда-то в центральный максимум. В то же время проекция импульса частицы на ось X равна:

$$p_x = p \sin \theta.$$

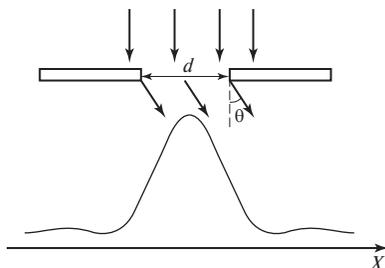


Рис. 30.5

Но угол θ мы не знаем точно. Следовательно, и проекция импульса нам точно не известна.

Введем неопределенности координаты Δx и проекции импульса Δp_x . Неопределенность данной величины характеризует точность, с которой мы можем измерить эту величину. Из нашего опыта видно, что точность измерения координаты равна ширине щели $\Delta x = d$. Неопределенность же проекции импульса равна $\Delta p_x = p \sin \theta_1$. Теперь воспользуемся формулой для первого минимума (30.5):

$$\Delta x \Delta p_x = h. \quad (30.6)$$

Теперь учтем, что частица может оказаться не только в центральном максимуме, но и в первом, втором и т.д., хотя вероятность такого события и мала. Это приведет к тому, что равенство (30.6) заменится неравенством:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h. \quad (30.7)$$

Полученное соотношение выражает **принцип неопределенности**, сформулированный Гейзенбергом: *невозможно одновременно точно определить значение координаты и проекции импульса на соответствующую ось.*

Предположим, что мы сумели точно определить координату, т.е. $\Delta x = 0$, тогда из (30.7) следует, что $\Delta p_x = \infty$, т.е. о проекции импульса мы не знаем ничего. Эта проекция может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. Аналогично, если мы точно знаем проекцию импульса, то ничего не знаем о координате.

Сразу же возникает вопрос: может быть наш опыт не очень удачен, какой-нибудь другой эксперимент позволит точно измерить координату и проекцию импульса? Но при проведении опыта мы использовали волновые свойства частицы. И принцип неопределенности является следствием волновых свойств частиц. Для того чтобы убедиться в том, что дело не в конкретном эксперименте, рассмотрим еще один мысленный опыт, предложенный Гейзенбергом — **микроскоп Гейзенберга**.

Предположим, что мы хотим определить положение частицы с помощью микроскопа (рис. 30.6). Для этого прежде всего ее нужно осветить. Используем для этой цели фотон с длиной волны λ_ϕ . Фотон рассеивается на частице и попадает в объектив микроскопа. Однако в силу дифракции света фотон может попасть в любую точку круга радиусом R на экране. Если бы мы освещали объектив микроскопа большим числом фотонов, то на экране наблюдалась бы дифракционная картина, положение первого минимума которой и описывалось бы окружностью радиуса R . Из теории микроскопа известно, что минимальное расстояние между двумя предметами,

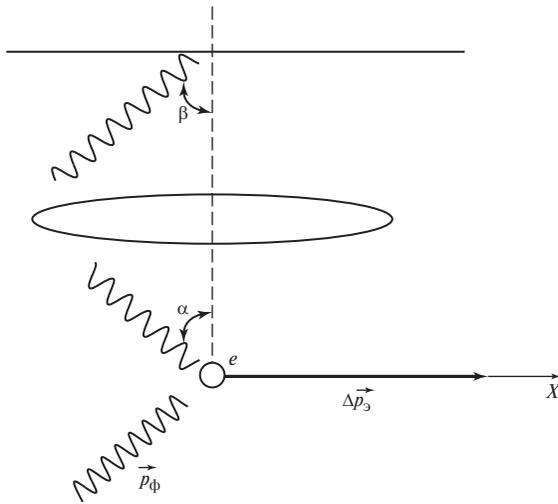


Рис. 30.6

которые видны раздельно, порядка длины волны излучения, т.е. наша частица будет давать размытое изображение из-за дифракции света. Причем неопределенность координаты x примерно равна длине волны фотона:

$$\Delta x \approx \lambda_{\phi}. \quad (30.8)$$

Теперь, чтобы увеличить точность измерения координаты электрона, будем уменьшать длину волны излучения, т.е. увеличивать его частоту. В конце концов мы сможем измерить координату сколь угодно точно. Но мы забыли про импульс. Если мы будем измерять координату макроскопического тела, например песчинки, то за счет освещения ее фотоном импульс песчинки не изменится. А что же будет с микроскопической частицей? При рассеянии фотон может передать электрону максимальный импульс $2p_{\phi}$. Таким образом неопределенность импульса электрона будет равна $\Delta p_x \approx 2p_{\phi}$, где p_{ϕ} — импульс фотона. Но импульс фотона, как мы знаем, равен $p_{\phi} = \hbar k = h/\lambda_{\phi}$. Откуда для неопределенности проекции импульса электрона получим:

$$\Delta p_x \approx 2h/\lambda_{\phi}. \quad (30.9)$$

Итак, уменьшая длину волны, мы тем самым увеличиваем неопределенность импульса электрона. Перемножив неопределенности импульса и координаты (формулы (30.8) и (30.9)), мы снова приходим к принципу неопределенности Гейзенберга

$$\Delta p_x \Delta x \approx h.$$

Из принципа неопределенности вытекает следствие. В классической механике мы представляли полную энергию частицы в виде суммы кинетической и потенциальной энергий. Кинетическая энергия зависит от скорости, т.е. от импульса частицы, в то время как потенциальная энергия зависит от координаты.

В квантовой механике такое разбиение *невозможно*, ведь частица не может иметь одновременно определенные координаты и импульс. В квантовой механике имеет смысл только *полная энергия*.

Пример 30.6. Рассмотрим еще один эксперимент. Во-первых, рассмотрим опыт, схема которого приведена на рис. 30.1. Пусть пули, вылетающие из автомата, пролетают через две щели. Как мы видели, приписанная пуле длина волны де Бройля настолько мала, что обнаружить интерференцию мы не сможем (расстояние между максимумами оказалось равным $\Delta x \approx 10^{-32}$ м). Возьмем маленький участок экрана и посчитаем число пуль, попавших в эту область экрана. Если разделить полученное число на полное число пуль, попавших в экран, то мы получим вероятность попадания пули в данный участок экрана $P = \Delta N/N$. Введем $f = P/(\Delta x)$ — *плотность вероятности* попадания пули на участок экрана длиной Δx . Результаты представлены на рис. 30.7.

Теперь закроем сначала одну из щелей, затем другую. Результаты изображены на рис. 30.8.

Теперь, если сложить плотности вероятностей f_1 и f_2 , то мы получим плотность вероятности f :

$$f = f_1 + f_2.$$

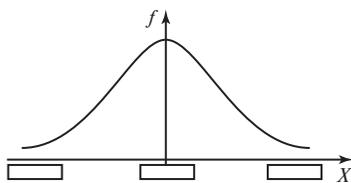


Рис. 30.7

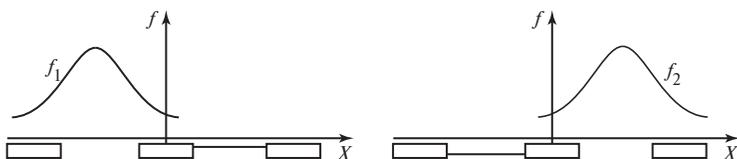


Рис. 30.8

Эта сумма плотностей вероятностей выражает тот факт, что пуля, попавшая в экран, прошла либо через одну щель, либо через другую.

Проведем аналогичный опыт с электронами. Но для электрона мы должны наблюдать интерференцию. Значит, на экране будет интерференционная картина, т.е. будут чередоваться темные и светлые полосы (рис. 30.9). Если мы закроем одну из щелей, то интерференция исчезнет. Результат представлен на рис. 30.10. Мы видим, что теперь, за счет интерференции $f \neq f_1 + f_2$.

Но остается вопрос: через какую щель пролетел электрон?

Сделаем следующий опыт. Будем освещать обе щели светом и по рассеянию фотонов на электронах будем определять, где пролетел электрон. Итак, мы будем строить два графика: слева мы отмечаем точку, если электрон пролетел через левую щель, и справа, если электрон пролетел через правую щель. У нас получатся точно такие же графики, что и на рис. 30.10. Если мы построим общий график, то вместо картины на рис. 30.9 мы получим график на рис. 30.7, т.е. теперь плотности вероятностей складываются. Как только мы узнали, через какую щель пролетел электрон, интерференция сразу же прекратилась.

Для того чтобы определить, где пролетел электрон, мы освещали его светом. И фотон, рассеявшись на электроне, передал ему свой импульс, тем самым изменив направление его движения, что привело к исчезновению интерференции. Импульс фотона $p_\phi = h/\lambda_\phi$. Это значит, что увеличивая длину волны фотона, мы уменьшаем его импульс и тем самым уменьшаем возмущение электрона фотоном.

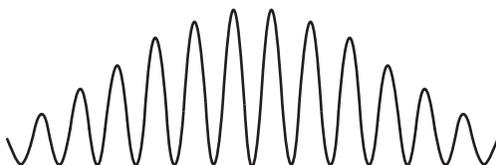


Рис. 30.9

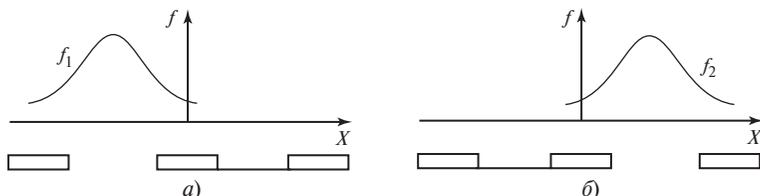


Рис. 30.10

В конце концов это возмущение станет настолько малым, что интерференция восстановится, и мы снова получим график на рис. 30.9.

Но тут нас ждет одна проблема. Нам понадобится микроскоп для наблюдения рассеянных фотонов. Но как мы видели, с увеличением длины волны изображение электрона становится все более размытым, поскольку $\Delta x \approx \lambda_{\phi}$. Так вот, как только интерференционная картина восстановится, неопределенность координаты электрона превысит расстояние между щелями. И мы опять не сможем сказать, через какую щель пролетел электрон.

Принцип неопределенности формулируется не только для проекции импульса и координаты, но и для энергии и времени:

$$\Delta E \Delta t \geq h. \quad (30.10)$$

Этот принцип утверждает, что чем короче время существования какого-то состояния (или время измерения параметров этого состояния), тем с меньшей определенностью можно говорить об энергии этого состояния.

Пример 30.7. В качестве примера рассмотрим возбужденное состояние атома. Время жизни возбужденного состояния атома (естественно, не метастабильного) $\tau = 10^{-8}$ с, т.е. за это время атом перейдет в невозбужденное состояние, излучив квант света. Найдём неопределенность энергии возбужденного состояния атома с помощью формулы (30.10):

$$\Delta E = h/\tau = 6,63 \cdot 10^{-34} / 10^{-8} = 6,63 \cdot 10^{-26} \text{ Дж.}$$

Найдём неопределенность частоты излученного при переходе фотона. Поскольку энергия кванта равна разности энергий возбужденного E_1 и невозбужденного E_2 уровней $\hbar\omega = E_1 - E_2$, то неопределенность частоты

$$\Delta \omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{6,63 \cdot 10^{-26}} 2\pi = 6,28 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Эта частота соответствует наблюдаемому при эксперименте естественному уширению спектральной линии.

30.5. Скорость волн де Бройля. Волновой пакет

Если ограничиться нерелятивистскими частицами, скорость которых много меньше скорости света в вакууме, то импульс частицы $\vec{p} = m \vec{v}$, а энергия

$$\mathcal{E} = m\vec{v}^2/2 = p^2/(2m). \quad (30.11)$$

Формула (30.11) представляет собой дисперсионное соотношение для нерелятивистской частицы. При рассмотрении электромагнитных волн мы ввели понятие фазовой и групповой скоростей.

Фазовая скорость

$$v_{\phi} = \omega/k \quad (30.12)$$

представляет собой скорость бесконечной синусоидальной волны.

Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = d\omega/dk \quad (30.13)$$

есть скорость распространения огибающей волнового пакета. В вакууме эти скорости не различаются и равны скорости света в вакууме. В среде фазовые и групповая скорости различаются в силу дисперсии света. Вдали от области поглощения групповая скорость характеризует скорость распространения сигнала.

Найдем фазовую и групповую скорости частицы. По аналогии с фотонами

$$\omega = \mathcal{E}/\hbar. \quad (30.14)$$

Подставим в (30.14) формулу (30.11):

$$\omega = p^2/(2m\hbar). \quad (30.15)$$

С помощью формул(30.2), (30.12), (30.13) найдем фазовую и групповую скорости частицы:

$$v_{\phi} = p/2m; \quad v_{\text{гр}} = p/m.$$

Поскольку $p = mv$, то $v_{\phi} = v/2$, $v_{\text{гр}} = v$.

Итак, мы пришли к выводу, что фазовая скорость волны де Бройля в 2 раза меньше скорости частицы, в то время как групповая скорость равна скорости частицы.

Таким образом, частице необходимо сопоставлять не одну бесконечную синусоидальную волну, а волновой пакет, групповая скорость которого и равна скорости частицы.

При изучении дисперсии света мы выяснили, что волновой пакет в среде расплывается в силу того, что фазовые скорости волн, из которых состоит волновой пакет, различны. Однако в вакууме все фазовые скорости одинаковы и волновой пакет, состоящий из электромагнитных волн, не расплывается.

Будет ли расплываться волновой пакет волн де Бройля?

Рассмотрим частицу, описываемую в начальный момент времени волновым пакетом, изображенным на рис. 30.11. Пусть частица движется вдоль оси X . Ширина волнового пакета описывает не что иное, как неопределенность координаты Δx_0 .

Такой частице мы должны сопоставить группу волн де Бройля с длинами волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$. Причем $\lambda = h/p$. Следовательно,

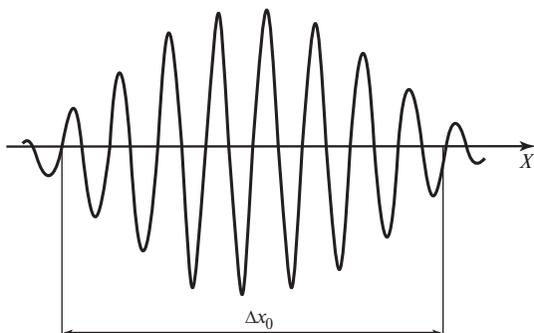


Рис. 30.11

такому волновому пакету присущ разброс скоростей $\Delta v = \Delta p_{x0}/m$, где Δp_{x0} — начальная неопределенность проекции импульса. Через время t волновой пакет расплывется, и неопределенность координаты станет равна: $\Delta x = \Delta v t = \Delta p_{x0} t / m$.

Теперь, воспользовавшись принципом неопределенности (30.7), получим:

$$\Delta x = \frac{ht}{m\Delta x_0}.$$

Пример 30.8. Оценим величину Δx . Пусть в начальный момент электрон был локализован в области, имеющей размеры атома $\Delta x_0 = 10^{-10}$ м. Какова же будет неопределенность координаты через 1 с?

$$\Delta x = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{0,91 \cdot 10^{-30} \cdot 10^{-10}} = 7 \cdot 10^6 \text{ м.}$$

Итак, свободная частица, локализованная на размерах атома, за 1 с «расплывется» до расстояний 7000 км!

30.6. Статистический смысл волн де Бройля

В § 30.5 мы выяснили, что волновой пакет, соответствующий частице, очень быстро расплывается. Возникает вопрос: как интерпретировать волну де Бройля?

Когда квантовая механика только создавалась, существовали различные интерпретации волны де Бройля. В частности, считалось, что частицы представляют собой суперпозицию волн, а интенсивность волн пропорциональна плотности среды, из которой образована частица.

Пример 30.9. Вернемся к расчету, выполненному в примере 30.8. Мы видели, что за одну секунду частица «расплывается» до расстояний 7000 км. Если бы интенсивность волны зависела от плотности частицы, то мы могли бы одновременно найти часть электрона в Москве и часть, скажем, в Лондоне. Но это противоречит опыту, который свидетельствует о том, что электрон неделим, т.е. мы можем обнаружить только целый электрон, но никак не его часть. Следовательно, такая интерпретация волн де Бройля нас не устраивает.

В § 30.5 мы рассмотрели интерференцию электронов на двух щелях (рис. 30.9, 30.10). Для характеристики интерференции мы ввели плотность вероятности обнаружения электрона в той или иной области экрана. Итак, свяжем волну де Бройля с плотностью вероятности обнаружения частицы. Для этого сравним наш опыт по интерференции электронов с аналогичным опытом по интерференции света. В этом случае рассматривают интенсивность света, а не плотность вероятности. Выведем формулу для интенсивности при интерференции света от двух когерентных источников.

Рассмотрим две плоские волны, разность фаз которых $\Delta\varphi$:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}); \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \Delta\varphi).\end{aligned}\tag{30.16}$$

Воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Теперь вместо формул (30.16) будем писать:

$$\left. \begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{10} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{20} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \Delta\varphi)},\end{aligned} \right\}\tag{30.17}$$

причем $\vec{E}_{1,2} = \text{Re}(\vec{E}_{1,2})$. Интенсивность света

$$I = A \left| \vec{E} \right|^2,\tag{30.18}$$

где A — коэффициент пропорциональности.

Используя формулы (30.17) и (30.18), находим интенсивность света при интерференции:

$$I = A \left| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right|^2 = A \left| \vec{E}_1 \right|^2 + A \left| \vec{E}_2 \right|^2 + A \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + A \vec{E}_2 \vec{E}_1^*.$$

Отсюда

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi).$$

Аналогичная ситуация возникает при интерференции электронов, но вместо интенсивности мы рассматриваем плотности вероятности.

Таким образом, плотность вероятности обнаружить частицу в той или иной области пространства связана с волновой функцией. По аналогии с оптикой для плотности вероятности получим $\rho = |\psi|^2$, где ψ — волновая функция частицы. Тогда вероятность обнаружить частицу в объеме V можно найти по формуле:

$$P = \int |\psi|^2 dV. \quad (30.19)$$

Предположим, что частица не взаимодействует с окружением. Тогда, по аналогии с формулами (30.17) будем иметь:

$$\psi(\vec{r}, t) = C e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}. \quad (30.20)$$

Эта формула соответствует бесконечной монохроматической волне де Бройля. Для волнового пакета соответственно получим:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_k C_k e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}.$$

Здесь C — некоторая константа, $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$; $\omega = E/\hbar = p^2/(2m\hbar)$.

Для определение константы C воспользуемся следующим свойством вероятности.

Обнаружение частицы в любой точке пространства есть достоверное событие, вероятность которого $P = 1$. Следовательно

$$P = \int |\psi|^2 dV = 1. \quad (30.21)$$

Условие (30.21) называется *условием нормировки*.

Подставляя сюда волновую функцию для монохроматической волны (30.21), получаем:

$$P = \int |C|^2 dV = |C|^2 \int dV = 1.$$

Отсюда $C = 1/\sqrt{V}$, где V — объем, стремящийся к бесконечности.

30.7. Некоторые задачи квантовой механики

В классической механике элементарная частица рассматривается как материальная точка, в каждый момент времени находящаяся в определенной точке пространства, задаваемой вектором $\vec{r}(t)$. В квантовой механике понятие «частица находится в точке про-

странства M » заменяется понятием: «с вероятностью P частица находится где-то внутри данного объема пространства ΔV ». Задачей квантовой механики является вычисление этой вероятности, которое можно сделать с помощью волновой функции частицы $\Psi(x, y, z, t)$ по формуле

$$P = \int_{\Delta V} \Psi \Psi^* dV.$$

Здесь Ψ^* — функция, комплексно сопряженная с Ψ , так как в общем случае волновая функция является функцией комплексного переменного. Величина $\Psi \Psi^* = dP/dV$ называется плотностью вероятности распределения положений частицы в пространстве. Найти волновую функцию частицы можно, решив основное уравнение квантовой механики — уравнение Шредингера, имеющее вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi + U(\vec{r}, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где $\Psi(\vec{r}, t)$ — искомая волновая функция частицы $U(\vec{r}, t)$ — потенциальная энергия частицы.

В виду сложности данного уравнения далее мы рассмотрим ситуацию, когда потенциальная энергия частицы не зависит от времени явно ($U = U(\vec{r})$), а частица может двигаться только по одной прямой (оси X). В этом случае уравнение Шредингера примет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x) \psi = E \psi.$$

В этом уравнении «новая» волновая функция ψ связана со «старой» Ψ соотношением $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$. Данное уравнение называют стационарным (ψ не зависит от времени) уравнением Шредингера для одномерного движения частицы. Здесь E — полная

энергия частицы. Величина $P = \int_{x_1}^{x_2} \psi \psi^* dx$ есть вероятность того, что

частица находится на отрезке $[x_1, x_2]$ прямой X . Отметим, что функции — решения данного дифференциального уравнения — должны быть непрерывны вместе со своими первыми производными: ψ и $d\psi/dx$ — непрерывными функциями координаты x . Из этого обстоятельства в ряде задач возникает дискретность или непрерывность уровней энер-

гии частицы E . Разберем несколько простейших одномерных задач квантовой механики:

- 1) частица находится в простейшей потенциальной яме;
- 2) частица движется в направлении прямоугольного потенциального барьера;
- 3) частица является гармоническим осциллятором, т.е. находится в поле упругой силы, пропорциональной смещению частицы от положения равновесия.

Пример 30.10. Одномерная «потенциальная яма».

Постановка задачи. Зависимость потенциальной энергии частицы от координаты x имеет вид $U(x) = 0$, если $|x| \geq a$ и $U(x) = -|U_0|$, если $|x| \leq a$. График этой функции, приведенный на рис. 30.12, и называется «потенциальной ямой». Необходимо определить характер движения частицы в зависимости от ее полной энергии.

Классическое решение. Если полная энергия частицы E заключена в интервале $U_0 < E < 0$, то частица будет двигаться внутри ямы, не покидая ее. Если полная энергия частицы $E > 0$, то частица может находиться в любой области оси X . При этом энергетический спектр (область значений полной энергии E) непрерывен.

Квантовое решение.

- 1) $U_0 < E < 0$. Внутри «ямы» уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k^2 \Psi = 0,$$

где $k = \sqrt{2m(E - U_0)/\hbar^2}$.

Вне «ямы» имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \beta^2 \Psi = 0,$$

где $\beta = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$.

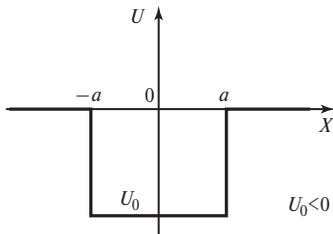


Рис. 30.12

Записывая решение этих уравнений в общем виде, используя непрерывность волновой функции и ее производной, симметрию задачи, можно прийти к следующему результату: полная энергия частицы E может принимать конечное число дискретных значений E_0, E_1, \dots, E_n , лежащих в интервале $(U_0, 0)$, т.е. $U_0 < E_0 < E_1 < \dots < E_n < 0$, т.е. полная энергия частицы E , находящейся в яме, квантована. Именно в этом заключено главное отличие результата квантовомеханической задачи от классического ее решения. При этом частица не может покинуть ямы.

2) $E > 0$. В этом случае оба подхода, классический и квантовый, дают один результат: частица может находиться в любой области оси X , ее полная энергия может принимать любое значение в интервале $0 < E < \infty$.

Пример 30.11. Одномерный «потенциальный барьер».

Постановка задачи. Зависимость потенциальной энергии частицы, показанная на рис. 30.13, вида $U(x) = 0$ при $x < 0$ и $U(x) = U_0 > 0$ при $x \geq 0$ называется потенциальным барьером. Частица с энергией E движется слева направо по направлению к барьеру. Необходимо объяснить характер движения частицы в зависимости от ее полной энергии E .

Классическое решение. Если полная энергия частицы E меньше «высоты» барьера U_0 , то частица отражается от него без потери скорости; в противном случае ($E > U_0$) частица преодолевает барьер и движется в прежнем направлении с меньшей скоростью.

Квантовое решение. Необходимо решить два уравнения Шредингера:

В области $x < 0$ оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0,$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$.

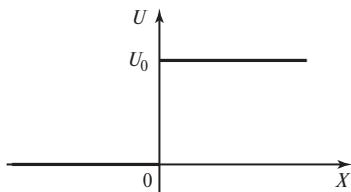


Рис. 30.13

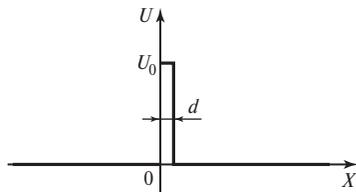


Рис. 30.14

В области $x > 0$ оно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \beta^2 \Psi = 0,$$

где $\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)$.

Полученная волновая функция должна быть непрерывна вместе с первой производной, что позволяет найти решение $\psi(x)$. Отметим основные результаты решения уравнения Шредингера.

1) $E > U_0$. Существует ненулевая вероятность отражения частицы от барьера. Коэффициент отражения от барьера имеет вид:

$$R = \left(\frac{k - \beta}{k + \beta} \right)^2,$$

а коэффициент прохождения барьера

$$D = \frac{4k\beta}{(k + \beta)^2}.$$

Отметим, что коэффициентом отражения R называют долю общего потока падающих частиц, приходящуюся на поток частиц отраженных. Аналогично определяется коэффициент прохождения барьера D .

2) $E < U_0$. В этом случае коэффициент отражения $R = 1$, коэффициент прохождения $D = 0$, но волновая функция справа от барьера имеет ненулевые значения, экспоненциально затухая с ростом x .

Особо интересен случай, когда барьер имеет конечную ширину d (рис. 30.14). Решение квантовомеханической задачи при $E < U_0$ (классически непреодолимый барьер) позволяет определить ненулевой коэффициент прохождения D этого барьера в виде

$$D = D_0 \exp \left\{ -\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \right\}.$$

Данное явление получило название «туннельного эффекта»; оно экспериментально открыто и используется в современных технологиях. Покажем на примитивном примере историю этого названия. На рис. 30.15, *a* движущаяся со скоростью $v < \sqrt{2gh}$ частица, которая должна подняться до точки *A* горки и вернуться назад, преодолевает горку и оказывается правее нее, двигаясь с прежней скоростью (рис. 30.15, *б*). Все происходит так, как будто в горке имеется туннель

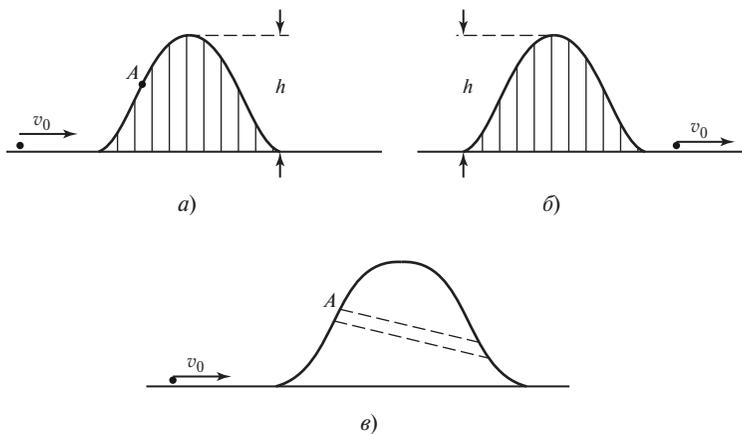


Рис. 30.15

(рис. 30.15, в), который «помог» частице преодолеть энергетический барьер.

Пример 30.12. Гармонический осциллятор. Назовем гармоническим осциллятором частицу, движущуюся по прямой линии, на которую действует возвращающая в положение равновесия сила, пропорциональная смещению частицы от положения равновесия. Масса частицы m , коэффициент пропорциональности между силой и смещением частицы k .

Постановка задачи. Описать характер движения частицы в зависимости от ее полной энергии $E = p^2/(2m) + U(x)$, где $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$ (рис. 30.16).

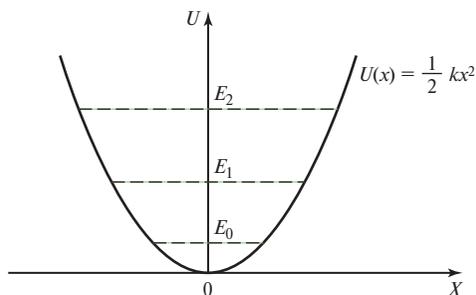


Рис. 30.16

Классическое решение. Положительная полная энергия частицы $E = p^2/(2m) + kx^2/2$ может быть любой. При фиксированной $E = E_0$ частица совершает гармонические колебания с амплитудой координаты $x_0 = \sqrt{2E/k}$ и амплитудой скорости $v_0 = \sqrt{2E/m}$.

Квантовое решение. Волновую функцию $\psi(x)$ квантового осциллятора можно найти, решив уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} kx^2 \Psi = E \Psi.$$

Математическое решение этого уравнения оказывается достаточно сложным; можно указать, что его решения — волновые функции — выражаются как произведения экспонент на полиномы Чебышева — Эрмита. Анализ этих решений приводит к следующему выводу. Энергетические уровни осциллятора описываются формулой:

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Разность энергий соседних уровней равна $\hbar\omega$ (они находятся на равных расстояниях один от другого). Кроме того, существует нижний (нулевой) уровень энергии, равный $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$ (классическая величина $E \geq 0$ могла быть любой). В квантовой механике это невозможно. Равенство $E = p^2/(2m) + kx^2/2$ означало бы, что нам совершенно точно известны импульс p_x и координата x частицы, равные нулю. Соотношение неопределенностей (один из главных законов квантового мира) $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ утверждает, что это невозможно.

В заключение скажем, что точное математическое решение уравнения Шредингера даже в упомянутых выше «простейших» трех примерах очень сложно, поэтому мы не привели формул для волновых функций — его решений, а проанализировали следующие из этих решений выводы и различия результатов для классического и квантового решений этих задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Раздел I. МЕХАНИКА	4
Глава 1. Кинематика	4
1.1. Система координат. Система отсчета. Способы задания положения точки в пространстве	5
1.2. Понятие траектории. Кинематический закон движения материальной точки. Вектор перемещения. Путь	6
1.3. Скорость. Нахождение пути. Ускорение	8
1.4. Кинематический закон движения материальной точки с постоянным ускорением	9
1.5. Нормальное и тангенциальное ускорения	10
1.6. Вращательное движение абсолютно твердого тела. Кинематические характеристики вращательного движения вокруг неподвижной оси	13
1.7. Преобразования скорости и ускорения при переходе к другой системе отсчета.	17
Глава 2. Динамика поступательного движения твердого тела.	20
2.1. Основные понятия динамики. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея	20
2.2. Второй и третий законы Ньютона	21
2.3. Силы	23
2.4. Импульс материальной точки и системы материальных точек. Закон сохранения импульса	26
2.5. Центр масс системы материальных точек. Уравнение движения центра масс системы материальных точек.	30
2.6. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции	31
Глава 3. Работа и энергия в механике поступательного движения	33
3.1. Механическая работа	33
3.2. Силовое поле. Потенциальные и непотенциальные силы. Критерий потенциальности поля сил	36
3.3. Кинетическая энергия материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии.	38
3.4. Потенциальная энергия взаимодействия	39
3.5. Дифференциальная связь между потенциальной силой и потенциальной энергией. Понятие градиента	43
3.6. Закон сохранения механической энергии	44
Глава 4. Динамика вращательного движения твердого тела	46
4.1. Момент импульса точки относительно полюса.	46

4.2. Момент импульса системы материальных точек относительно полюса	50
4.3. Момент импульса относительно оси	53
4.4. Момент инерции твердого тела	55
4.5. Теорема Гюйгенса — Штейнера	59
4.6. Теорема Кёнига	61
4.7. Кинетическая энергия вращающегося тела	62
4.8. Плоское движение твердого тела (качение).	65
Глава 5. Примеры решения некоторых задач механики	69
Глава 6. Механические колебания	75
6.1. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение колебаний	75
6.2. Векторные диаграммы	77
6.3. Динамика гармонических колебаний	78
6.4. Механическая энергия гармонических колебаний	81
6.5. Затухающие колебания	82
6.6. Вынужденные колебания. Резонанс	84
Глава 7. Элементы специальной теории относительности.	87
7.1. Инварианты преобразований Галилея	87
7.2. Постулаты Эйнштейна	90
7.3. Преобразования Лоренца	92
7.4. Следствия преобразований Лоренца	93
7.5. Динамика в специальной теории относительности	96
7.6. Связь массы и энергии	98
Раздел II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА.	99
Глава 8. Основные понятия молекулярной физики	99
8.1. Масса и размеры молекул	100
8.2. Параметры термодинамических систем. Состояние системы. Процесс	101
8.3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории	102
8.4. Температура	104
8.5. Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа. Изопроцессы идеального газа	105
Глава 9. Элементы статистической физики	110
9.1. Элементарные сведения из теории вероятностей	110
9.2. Распределение молекул по скоростям	111
9.3. Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости молекул	117
9.4. Барометрическая формула	121
9.5. Распределение энергии молекулы по степеням свободы	122

Глава 10. Первое начало термодинамики	125
10.1. Внутренняя энергия системы молекул. Работа в термодинамике. Количество теплоты	125
10.2. Первое начало термодинамики	127
10.3. Применение первого начала термодинамики для идеального газа. Политропные процессы	128
10.4. Анализ изопроцессов идеального газа с помощью первого начала термодинамики	133
10.5. Ограниченность молекулярно-кинетической теории теплоемкости идеального газа	136
10.6. Невозможность вечного двигателя первого рода	137
Глава 11. Тепловые машины. Второе начало термодинамики	138
11.1. Обратимые и необратимые процессы и циклы	138
11.2. Тепловая машина и ее термический КПД	141
11.3. Цикл Карно	142
11.4. Второе начало термодинамики. Энтропия	145
11.5. Основные свойства энтропии	147
11.6. Статистический смысл второго начала термодинамики	149
Глава 12. Явления переноса в газах	151
12.1. Столкновения молекул	151
12.2. Диффузия	154
12.3. Теплопроводность	158
12.4. Вязкость жидкостей и газов	159
12.5. Связь коэффициентов переноса	163
Глава 13. Примеры решения некоторых задач молекулярной физики и термодинамики.	165
Глава 14. Реальные газы	173
14.1. Молекулярные силы	173
14.2. Уравнение Ван-дер-Ваальса	176
14.3. Изотермы реального газа	178
14.4. Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля—Томсона.	180
Раздел III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.	183
Глава 15. Электростатическое поле в вакууме	184
15.1. Электрический заряд и его свойства. Закон Кулона	185
15.2. Напряженность электрического поля. Силовые линии	187
15.3. Суперпозиция электростатических полей	190
15.4. Работа сил электростатического поля. Разность потенциалов. Потенциал	192
15.5. Связь напряженности и потенциала. Градиент скалярного поля	196
15.6. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме	198
15.7. Примеры использования теоремы Гаусса	202

Глава 16. Электрическое поле в диэлектриках	209
16.1. Диполь в электростатическом поле. Поляризация диэлектриков. Типы диэлектриков	209
16.2. Количественные характеристики поляризации диэлектрика	214
16.3. Связанные заряды на поверхности диэлектрика	215
16.4. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектриках	216
16.5. Условия на границе диэлектрических сред	220
Глава 17. Проводники в электростатическом поле. Энергия электростатического поля	223
17.1. Проводники в электростатическом поле	223
17.2. Электрическая емкость. Конденсаторы	227
17.3. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии	234
17.4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Уравнение Пуассона	237
Глава 18. Примеры решения некоторых задач электростатики	242
Глава 19. Постоянный электрический ток	249
19.1. Электрический ток и условия его существования	249
19.2. Сила тока, плотность тока. Уравнение непрерывности	250
19.3. Закон Ома. Сопротивление проводников	252
19.4. Основные представления классической электронной теории электропроводности металлов	255
19.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Электродвижущая сила	257
Глава 20. Магнитное поле постоянного тока	261
20.1. Магнитная индукция. Закон Био—Савара—Лапласа	261
20.2. Теорема о циркуляции магнитной индукции	270
20.3. Движение заряженной частицы в магнитном и электрическом полях. Эффект Холла	275
20.4. Действие магнитного поля на проводник и контур с током. Закон Ампера	280
20.5. Магнитный поток. Потокосцепление	284
20.6. Работа сил магнитного поля по перемещению проводника и контура с током	286
Глава 21. Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля	289
21.1. Явление электромагнитной индукции	289
21.2. Электродвижущая сила индукции	292
21.3. Индукционный ток. Индукционный заряд. Вихревое электрическое поле	295
21.4. Самоиндукция. Индуктивность	296
21.5. Токи при размыкании и замыкании цепей, содержащих индуктивность	298
21.6. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии	301
21.7. Взаимная индукция	303

Глава 22. Магнитное поле в веществе. Магнетики	305
22.1. Магнитное поле в веществе. Типы магнетиков	305
22.2. Условия на границе магнитных сред	310
22.3. Магнитные моменты атомов и молекул	312
22.4. Диамагнетизм	313
22.5. Парамагнетики в магнитном поле.	317
22.6. Ферромагнетизм	319
Глава 23. Примеры решения некоторых задач по теме «Магнетизм»	324
Глава 24. Электрические колебания	330
24.1. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления.	330
24.2. Свободные затухающие колебания.	334
24.3. Вынужденные электрические колебания	337
Глава 25. Уравнения Максвелла. Электромагнитное поле	343
25.1. Первое уравнение Максвелла в интегральной форме	343
25.2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла в интегральной форме	345
25.3. Система уравнений Максвелла в интегральной форме.	348
25.4. Дивергенция и ротор векторного поля	349
25.5. Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме	353
Глава 26. Электромагнитные волны.	355
26.1. Волновой процесс. Уравнение волны.	355
26.2. Волновое уравнение.	358
26.3. Уравнение электромагнитной волны	359
26.4. Поперечность электромагнитных волн	361
26.5. Скорость электромагнитной волны	364
26.6. Соотношение магнитной и электрической компонент в электромагнитной волне	365
26.7. Энергия электромагнитного поля	366
26.8. Излучение диполя	367
Раздел IV. ОПТИКА. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ	370
Глава 27. Распространение электромагнитных волн.	370
27.1. Сложение колебаний	370
27.2. Интерференция	373
27.3. Полосы равной толщины	377
27.4. Полосы равного наклона	379
27.5. Дифракция света.	381
27.6. Дифракция Френеля	386
27.7. Дифракция Фраунгофера	392
27.8. Дифракция от N щелей (дифракционная решетка)	400
27.9. Поляризация	412
27.10. Отражение и преломление света на границе раздела двух диэлектриков	415

Глава 28. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом	419
28.1. Двойное лучепреломление	419
28.2. Интерференция плоскополяризованного света	427
28.3. Дисперсия	436
28.4. Поглощение света.	440
28.5. Волны в веществе как результат интерференции первичной и вторичных волн	444
28.6. Дисперсия в плазме	446
28.7. Скорость передачи сигналов в среде с дисперсией	450
28.8. Рассеяние света.	454
Глава 29. Квантовая оптика	458
29.1. Тепловое излучение	458
29.2. Формула Планка	463
29.3. Релятивистское соотношение между импульсом и энергией	471
29.4. Эффект Комптона	472
29.5. Фотоэффект	474
29.6. Тормозное рентгеновское излучение	478
Глава 30. Основы квантовой механики	479
30.1. Корпускулярно-волновой дуализм	479
30.2. Гипотеза де Бройля	480
30.3. Экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля	481
30.4. Принцип неопределенности Гейзенберга	483
30.5. Скорость волн де Бройля. Волновой пакет	489
30.6. Статистический смысл волн де Бройля	491
30.7. Некоторые задачи квантовой механики	493

Учебное электронное издание

**Варава Александр Николаевич, Губкин Михаил Константинович,
Иванов Дмитрий Александрович и др.**

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Учебное пособие для вузов

Редактор *Л.А. Решмина*

Корректоры *В.В. Сомова*

Компьютерная верстка *В.В. Пак*

Подготовка электронного издания *Д.О. Лазарев*

АО «Издательский дом МЭИ», 111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14А,
тел/факс: (495) 640-83-27, адрес в Интернете: <http://www.idmei.ru>,
электронная почта: info@idmei.ru